第四版序言

在这一版中，由于补充了新的材料，第三卷分成两部分。第一部分包括关于綫性代数，二次型理論和群論的全部材料。在这一部分中主要的补充是关于群論的。在編写这些补充材料的过程中，Д. К. 法捷耶夫給了我很大的帮助。特别是关于轉动群与劳倫次群单純性的闡明，按結构常数来建立群与群上的积分 [70, 81, 87, 88, 89, 90] 这些部分的材料的說明是属于他的。对于他在这本书的准备工作中所給予的帮助我表示极大的謝意。

B. И. 斯米尔諾夫

第一分册目次

第四版序言

第一章　行列式与方程组的解法 ………………………………………… 1

§1. 行列式及其性质 ……… ……… 1

1. 行列式的概念 (1)　2 1)
4. 行列式的计算(17)　5. 5)
7. 长方形表(28)

§2. 方程组的解法 …………………… ……… 32

8. 克兰姆定理(32)　**9**. 方程组的普遍情形(34)　**10**. 齐次方程组(39)　**11**. 线性型(42)　**12**. n 维矢量空间(44)　**13**. 数量积(51)　**14**. 齐次方程组的几何解释(53)　**15**. 非齐次方程组的情形(56)　**16**. 格拉姆行列式,阿达马不等式(59)　**17**. 常系数线性微分方程组(63)　**18**. 函数行列式(67)　**19**. 隐函数(71)

第二章　线性变换和二次型 ……………………………………………75

20. 三维空间中的坐标变换(75)　**21**. 实三维空间的一般线性变换(79)　**22**. 共变的和逆变的仿射矢量(87)　**23**. 张量的概念(89)　**24**. 仿射正交张量的例子(92)　**25**. n维复空间的情形(94)　**26**. 矩阵计算的基础(99)　**27**. 矩阵的特征值与化矩阵成标准形式(104)　**28**. U变换和正交变换(111)　**29**. 彭雅科夫斯基不等式(116)　**30**. 数量乘积和模的性质(118)　**31**. 矢量的正交化手续(119)　**32**. 化二次型为平方和(121)　**33**. 特征方程有重根的情形(126)　**34**. 例(131)　**35**. 二次型的分类(133)　**36**. 雅科比公式(137)　**37**. 同时化两个二次型成平方和(138)　**38**. 微振动(140)　**39**. 二次型特征值的极值性质(142)　**40**. 厄密特矩阵和厄密特型(144)　**41**. 可交换的厄密特矩阵(150)　**42**. 化U矩阵成对角形式(153)　**43**. 投影矩阵(157)　**44**. 矩阵的函数(161)　**45**. 无限维空间(164)　**46**. 矢量的收敛(170)　**47**. 完全正交矢量组(174)　**48**. 无限多个变数的线性变换(179)　**49**. 函数空间(183)　**50**. 函数空间和空间H的关系(186)　**51**. 线性函数运算子(190)

第三章　群论基础和群的线性表示 ……………………………197

52. 线性变换群(197) 53. 正多面体群(200) 54. 劳伦次变换(203) 55. 置换(211) 56. 抽象群(216) 57. 子群(219) 58. 类和正规子群(223) 59. 例(226) 60. 群的同构和准同构(228) 61. 例(230) 62. 测地投影(232) 63. U 群和转动群(234) 64. 一般线性群和劳伦次群(240) 65. 群的线性变换表示(244) 66. 基本定理(248) 67. 阿倍尔群和一阶表示(253) 68. 两个变数的 U 群的线性表示(255) 69. 转动群的线性表示(262) 70. 关于转动群的单纯性的定理(266) 71. 拉普拉斯方程和转动群的线性表示(267) 72. 矩阵的直接乘积(273) 73. 群的两个线性表示的合成(276) 74. 群的直接乘积和它的线性表示(279) 75. 转动群的线性表示的合成 $D_j\times D_{j'}$的分解(282) 76. 正交的性质(288) 77. 品格(292) 78. 群的正则表示(295) 79. 有限群表示举例(297) 80. 两个变数的线性群的表示(299) 81. 关于劳伦次群的单纯性的定理(303) 82. 连续群、结构常数(305) 83. 无穷小变换(309) 84. 转动群(313) 85. 无穷小变换与转动群的表示(315) 86. 劳伦次群的表示(320) 87. 辅助公式(323) 88. 根据结构常数来建立群(325) 89. 群上的积分(327) 90. 正交性质例子(331)

第一章　行列式与方程組的解法

§1.　行列式及其性質

1. 行列式的概念　我們从解一个簡單的代数問題，即从解一次方程組的問題来开始这一节。由于对这种問題的研究，我們获得了行列式的重要概念。

让我們从研究一些最簡單的特殊情形来开始。先取具有两个未知数的两个方程所成的方程組：

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1,$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\text{。}$$

未知数的系数 a_{ik} 带有两个指标，第一个指标說明这个系数出現在那一个方程中，而第二个說明它是那一个未知数的系数。

大家知道，这方程組的解具有下面的形式：

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\text{。}$$

再看由具有三个未知数的三个方程所成的方程組：

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,$$

$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3,$$

这里我們仍用上面的关于系数的标記法，将头两个方程改写成下列形式：

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1-a_{13}x_3,$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2-a_{23}x_3\text{。}$$

按上面的公式，由这两个方程解未知数 x_1 与 x_2，即得

$$x_1=\frac{(b_1-a_{13}x_3)a_{22}-a_{12}(b_2-a_{23}x_3)}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},$$

$$x_2=\frac{a_{11}(b_2-a_{23}x_3)-(b_1-a_{13}x_3)a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}。$$

把这两个表达式代入方程組的最后一个方程中，即得一个仅含未知数 x_3 的方程。最后解这个方程，即得 x_3 的最終表达式：

$$x_3=\frac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}。\tag{1}$$

我們来詳細地研究一下这表达式的結构。首先看到，将分母中未知数 x_3 的所有系数 a_{i3} 各用常数項 b_i 替換即得分子。这样，还待闡明的只是組成分母的規律了。分母不含有常数項而是純粹由方程組的系数組成的。先让我們把这些系数按它們在原来方程組中的位置写成一个正方形的表：

$$\left\|\begin{matrix}a_{11}, & a_{12}, & a_{13}\\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}\\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}\end{matrix}\right\|。\tag{2}$$

这个表含有三行与三列。a_{ik} 这些数叫做它的元素。a_{ik} 的第一个指标表示它所在的行的序数，而第二个則表示它所在的列的序数。現在写出（1）式的分母：

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}。\tag{3}$$

我們看到，它是由六項組成的，其中每一項是（2）中三个元素的乘积，而且每个乘积含有每一行和每一列的元素。实际上，这些乘积具有下面的形式：

$$a_{1p}a_{2q}a_{3r},\tag{4}$$

其中 p, q, r 是整数 1, 2, 3 的某一个一定的排列。如此，正如所有第一指标一样，所有第二指标也正是整数 1, 2, 3 的全体，因而乘积(4)确实含有每行和每列的一个元素。为要得到(3)式中所有的項，只需要在乘积(4)中就第二指标 p, q, r 取所有可能的不同的排列。第二指标的所有可能的排列显然有以下六种：

$$1,2,3;\ \ 2,3,1;\ \ 3,1,2;\ \ 1,3,2;\ \ 2,1,3;\ \ 3,2,1。\qquad (5)$$

由是，我們即得(3)式的六項。但是我們看到，乘积(4)在(3)式中出現时，有一些带正号，而另一些则带負号。于是只要再說明选擇正負号所依据的法則了。如我們所見，带正号的那些乘积(4)的第二指标形成下列的排列：

$$1,2,3;\ \ 2,3,1;\ \ 3,1,2。\qquad (5_1)$$

而带負号的那些乘积的第二指标形成下列排列：

$$1,3,2;\ \ 2,1,3;\ \ 3,2,1。\qquad (5_2)$$

現在来說明排列(5_1)与排列(5_2)的区别。在一个排列中，比較每一对数，如果大的在小的前面，则叫做一个逆序。我們来計算(5_1)中諸排列的逆序个数。其中第一个排列沒有逆序，就是說逆序的个数为零。再看第二个排列，逐次比較每一数与其后各数的大小，我們看出，这里有两个逆序。即一个是 2 在 1 前面，一个是 3 在 1 前面。同样，不难看到，(5_1)中的第三个排列含有两个逆序。总之，可以說在 (5_1) 中的所有排列都含有偶数个逆序。用完全同样方法来研究 (5_2) 中的排列，我們看到，它們都含有奇数个逆序。現在，我們可以把表达式(3)中的正負号法則叙述如下：乘积(4)中，凡是第二指标所成排列的逆序数是偶数的，出現在表达式(3)中时，沒有任何改变。凡是第二指标所成排列的逆序数为奇数的，出現在表达式(3)中时，冠以負号。表达式(3)叫做对应于数表(2)的三阶行列式。現在不难把它推广到任意阶行列式的情形。

假定有 n^2 个数，安排在一个 n 行 n 列的正方形的表內：

$$\left\|\begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots, & a_{nn} \end{matrix}\right\|。\qquad (6)$$

这个表内的元素 a_{ik} 是給定的复数，而 i 与 k 分别表示元素 a_{ik} 所在的行与列的序数。从数表（6）組成所有可能的这样的乘积，使得这些乘积恰好含有每行和每列的一个元素，这些乘积具有下面的形式：

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}, \qquad (7)$$

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是数 $1, 2, \cdots, n$ 的某一个排列。为了要得到所有可能的形式如（7）的乘积，我們需要取第二指标的所有可能的排列。从初等代数得知，这样的排列的总数等于整数 n 的階乘：

$$1\cdot 2\cdot 3\cdots n=n!$$

每个这样的排列，与基本排列

$$1, 2, 3, \cdots, n$$

来比較，就有一些逆序。

所有那些乘积（7），如果由它們的第二指标所成的排列含有偶数个逆序，则不加任何改变，而所有那些乘积（7），如由它們的第二指标所成的排列含有奇数个逆序，则加上一个負号。这样得到的所有乘积的和就叫做对应于表（6）的 n 阶行列式。这个和显然含有 $n!$ 項。我們不难将这个定义用公式表出来。为此須引进一些符号。令 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为数 $1, 2, \cdots, n$ 的某一个排列。用符号

$$[p_1, p_2, \cdots, p_n]$$

来記这个排列所含逆序的个数。

于是，以上所給的对应于表（6）的行列式的定义可写成下面

的公式，我們把表(6)用两根竪綫夹起来作为行列式的記号：

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots, & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1,p_2,\cdots,p_n)} (-1)^{[p_1,p_2,\cdots,p_n]} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}。 \quad (8)$$

等式右端要对第二指标的所有可能的排列取和，也就是对所有可能的排列 $(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 取和。 如果我們只談表的本身，而不是讲由它构成的行列式，就把这表写在两双竪綫之間。

須注意，在(3)式的每个乘积中，我們把它的因子照这样的次序来安排，使第一指标恒組成基本排列 1, 2, 3, 因此我們只要考虑由第二指标所形成的排列。 与此相反，我們也可以把每个乘积中的因子重新安排，使第二指标都按上升次序排列；此时，(3)式可換写成下面的形式：

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{31}a_{12}a_{23}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{31}a_{22}a_{13}。 \quad (9)$$

这里第一指标取所有可能的排列 p, q, r，而且容易驗証，(9)式各項的正負号法則，可以完全用前面那样的說法表述出来，只不过就第一指标来說罢了。 这就使我們除了考察和(8)以外，还要来考察下面这个类似的和：

$$\sum_{(p_1,p_2,\cdots,p_n)} (-1)^{[p_1,p_2,\cdots,p_n]} a_{p_11} a_{p_22} \cdots a_{p_nn}。 \quad (10)$$

显然，这个和同样是由(8)的那些項所組成。 以后我們会看到，它的項的正負号法則也是与在和(8)中相同的。那就是說，与 $n=3$ 的情形一样，和(10)与和(8)是全同的。

最后，再回到 $n=2$ 的情形，此时表取形式

$$\begin{Vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{Vmatrix}$$

并且公式(8)給予一个与此表对应的二阶行列式的表达式：

$$\begin{Vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{Vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}。 \quad (11)$$

由上面直接可知，为要闡明行列式的性质，必須对排列的性质有較深的认識。我們立卽轉向这个問題。

2. 排列 假設有任意的 n 个元素，把它們按一定的次序排列起来，我們把这叫做由这 n 个元素形成的一个排列。首先我們来証明，这样的不同的排列恰有 $n!$ 个。当 $n=2$ 时，这是显然的，因为两个元素可以形成两个不同的排列。当 $n=3$ 时，这只要数一下排列(5)的个数卽可直接推知，那里的数 1, 2, 3 就是元素。不难知道，(5)已給出了由三个元素而成的所有可能的排列。現在用归納法来証明我們的論断对于任何的正整数 n 总是对的。假定我們的論断对某一个 n 成立，由此来証明它对于 $n+1$ 个元素也成立。就是說，假定 n 个元素产生 $n!$ 个排列，让我們来考虑任何的 $n+1$ 个元素产生的排列。把这 $n+1$ 个元素記作：

$$C_1, C_2, \cdots, C_{n+1}。$$

首先注意第一个元素为 C_1 的那些排列。为了要得到所有可能的这样的排列，应当把 C_1 放在第一个位置，然后写下其余 n 个元素的所有可能的排列。按照假定这样的排列的个数是 $n!$。因此，由 $C_1, C_2, \cdots, C_{n+1}$ 形成的以元素 C_1 为首的排列总数是 $n!$。完全一样，由 $C_1, C_2, \cdots, C_{n+1}$ 形成的以元素 C_2 为首的排列总数也是 $n!$。总的說来，$C_1, C_2, \cdots, C_{n+1}$ 的不同排列总数等于

$$n!(n+1) = 1\cdot 2\cdots n\cdot(n+1) = (n+1)!,$$

这样，就証明了以上的論断。

当然，我們可以把从 1 开始的一些整数取作元素，以后我們就这样来做。在一个排列中对調两个元素的位置，这样一个动作就叫做一个对換。显然可直接看出，由某一个排列經过一些对换可以得到任何一个其他的排列。例如，取四个元素的两个排列

$$1, 3, 4, 2; \quad 2, 4, 1, 3。$$

由这里第一个排列經下列一串对换就得到第二个排列:

$$1, 3, 4, 2 \to 2, 3, 4, 1 \to 2, 4, 3, 1 \to 2, 4, 1, 3。$$

为了把第一个排列变成第二个排列,这里我們用了三个对换。如果我們换个方式来施行对换,也可能由其他的方法利用对换把第一个排列变成第二个排列,换句話說,就是把第一个排列变成第二个排列所需要的对换的个数并不是一个确定的数。虽然可以用不同数目的对换把一个排列变成另一个排列。但是可以証明一件重要的事实:对于两个給定的排列,这些不同的对换数目或者全是偶数或者全是奇数。这也就是說这些数目总有同一的奇偶性。为了說明这一点,我們引用前一小节用过的逆序概念。試看由 n 个元素 $1, 2, \cdots, n$ 形成的排列。按照递升的次序排列起来的排列

$$1, 2, \cdots, n, \tag{12}$$

叫做基本排列。如果一个排列中两元素的相互次序与它們在基本排列(12)中的相互次序相反(就是說大的在小的左边),这就叫做該排列中的一个逆序。凡逆序的数目为偶数的排列叫做第一类排列,而逆序数目为奇数的排列叫做第二类排列。下面这个定理对以下的論述来讲是基本的。

由一个对换而引起的逆序数目的改变是一个奇数。

取定某一个排列

$$a, b, \cdots, k, \cdots, p, \cdots, s, \tag{13}$$

并且假設,我們把 k 与 p 的对换施于这个排列,就是說在排列中对調这两个元素的相互位置。經过这样的对换之后,元素 k 与 p 对于在 k 之左或在 p 之右的元素的相互位置保持不变。只有这排列中介于 k 与 p 之間的那些元素与 k, p 的相互位置有所改变,当然 k 与 p 的彼此相互位置也有所改变。我們来計算逆序改变的总数。假設在排列(13)中 k 与 p 之間总共有 m 个元素,并且設这些中間

元素与 k 比較得到 α 个順序与 β 个逆序，又設它們与 p 比較得到 α_1 个順序与 β_1 个逆序，显然有

$$\alpha+\beta=\alpha_1+\beta_1=m\text{。} \tag{14}$$

施行对换的結果，順序变成逆序而且逆序变成順序。更确切地説，如果元素 k 与某一个中間元素在对换前它是順序，则在对换后就变成逆序，而且反过来也对。对于元素 p 也是一样。因此，k 与 p 对于中間元素的逆序数目在对换之前总共是 $\beta+\beta_1$，而在对换之后总共是 $\alpha+\alpha_1$，就是説逆序数的改变是

$$\gamma=(\alpha+\alpha_1)-(\beta+\beta_1)\text{。}$$

利用(14)，这个数目可改写成

$$\gamma=(\alpha+\alpha_1)-(m-\alpha+m-\alpha_1)=2(\alpha+\alpha_1-m),$$

由此直接推出，这个数 γ 是一个偶数。現在来看元素 k 与 p 的相互位置。如果在对换之前它們作成一个順序，则在对换之后它們作成一个逆序，而且反过来也对，这就是説，这里的逆序数的改变等于 1。因此，由于对换而引起的逆序改变的总数是一个奇数。

現在来叙述从这定理所得到的一些推論。

系 I. 如果写出全部 $n!$ 个排列，并且对于每一个排列作两个固定元素的对换，例如 1 与 3 的对换。則全部第一类排列都变成第二类排列，反过来也是如此，总的説来，我們仍然得到 $n!$ 个排列的全体。由此直接推出，第一类与第二类排列的数目相等。

系 II. 任何一个排列都可以由基本排列經过一些对换得到。从上面定理直接推出，凡可由基本排列用偶数个对换得到的那些排列作成第一类，而凡可由基本排列用奇数个对换得到的那些排列則作成第二类。

系 III. 基本排列的选擇完全可以任意。不用排列(12)而用其他任何一个排列作为基本排列都是可以的，在这情况下，規定逆序时，自然就应当以該排列与这个基本排列比較，就是説，应当以

元素在基本排列中的次序为根据。不难看出，如果我們取第一类中任何一个排列以代替排列 (12) 作为基本排列，則原来属于第一类的排列現在依然属于第一类，而原来属于第二类的現在依然属于第二类。反之，如果我們取第二类中任何一个排列作为基本排列，則原来第二类的排列成为現在的第一类的排列，而第一类的排列成为现在的第二类的排列。

例如，在元素 1, 2, 3 的六个排列中，我們可以取排列 2, 1, 3 作为基本排列，則下列排列是第一类排列：

$$2, 1, 3; \quad 1, 3, 2; \quad 3, 2, 1。$$

其中的第二个排列有两个逆序；1 在 2 前与 3 在 2 前，而在基本排列中 2 在 1 前且 2 在 3 前。下列的排列是第二类排列：

$$1, 2, 3; \quad 2, 3, 1; \quad 3, 1, 2。$$

其中的第一个排列与基本排列 2, 1, 3 比較有一个逆序，卽 1 在 2 前。

根据以上所讲的，我們可以把表达式 (8) 中的正負号法則叙述如下：如果一个乘积的因子的第二指标所作成的排列属于第一类，則在这乘积之前冠以正号，如果属于第二类，則在它的前面冠以負号，这里是把排列 $1, 2, \cdots, n$ 作为基本排列的。

現在我們来闡明行列式的一个基本性质。在給出行列式的那个表中将第一二两列对調。原来用 a_{ik} 所記的数，調換后仍然用带有同一指标的同一文字来表示。于是，从表 (6) 我們得到下面的表：

$$\begin{Vmatrix} a_{12}, & a_{11}, & a_{13}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{22}, & a_{21}, & a_{23}, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2}, & a_{n1}, & a_{n3}, & \cdots, & a_{nn} \end{Vmatrix}。 \tag{15}$$

根据由公式 (8) 所规定的行列式的定义，我們可以求得对应于表 (15) 的行列式。在这个表中的列的号碼排列如下：2, 1, 3,

…, n, 于是我們应当把这个排列看作基本排列。它是由原来的基本排列用一个对换而得到的，因此，它原来是属于第二类的。所以原来的第二类排列对于这个新的基本排列而言成了第一类的排列而且反过来也是如此。因此，对应于表(15)的行列式就是在公式(8)中出現的那些項的一个和，但是，由于剛才談到的第二指标所作成的排列的类的变更，这个新和的各項的正負号与和(8)中相当項的正負号相反，就是說，当两列对調时，行列式的值改号。对一二两列对調的情形我們已經証明了这个性質。对于任意两列对調的情形上述的証明也仍然适用，例如，下面的等式成立：

$$\begin{vmatrix} 1, 0, 3 \\ 2, 7, 6 \\ 5, 3, 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1, 3, 0 \\ 2, 6, 7 \\ 5, 0, 3 \end{vmatrix}。$$

第二个行列式是由第一个經二三两列对調而得到的。

现在再說明行列式的一个性质。取定和(8)中的某一項

$$(-1)^{[p_1, p_2, \cdots, p_n]} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}。 \tag{16$_1$}$$

只要調換上面乘积中的因子，我們可以得到第二指标的递升排列，这时第一指标形成某个排列 $q_1, q_2, \cdots, q_n$，上式就可以写成

$$(-1)^{[p_1, p_2, \cdots, p_n]} a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}。 \tag{16$_2$}$$

从 (16_1) 到 (16_2) 的过程可以借一些因子間的对换来完成。每一个这样的对换不仅是第一指标所成的排列的对换同时也是第二指标所成的排列的对换。如果从 (16_1) 过渡到 (16_2) 所需要的对换的个数是偶数，则由此可以推得，排列 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 属于第一类。因为它既然可借偶数个对换变成基本排列 $1, 2, \cdots, n$，显然可知，它也可借偶数个对换从基本排列得到。而且，此时排列 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 也属于第一类，因为它是借同样的偶数个对换从基本排列得到的。由同样的理由，如果 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 属于第二类，則

$q_1, q_2, \cdots, q_n$ 也属于第二类。由此推出,

$$(-1)^{[p_1,p_2,\cdots,p_n]}=(-1)^{[q_1,q_2,\cdots,q_n]},$$

因此我們有

$$(-1)^{[p_1,p_2,\cdots,p_n]}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=(-1)^{[q_1,q_2,\cdots,q_n]}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}。$$

总之,如果我們比較和(8)与和(10)的对应項,則可看出,这两个和恰好全同,在和(10)中行所起的作用正如在和(8)中列所起的作用。由我們的討論直接推得,如果在表中所有的行用列代替而且所有的列用行代替,但不改变它們的次序,則此表的行列式的值不变。

例如,下列两个三阶行列式相等:

$$\begin{vmatrix}2, & 3, & 5\\ 7, & 0, & 1\\ 2, & 1, & 6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2, & 7, & 2\\ 3, & 0, & 1\\ 5, & 1, & 6\end{vmatrix}。$$

3. 行列式的基本性質 I. 首先叙述剛才証明过的性質——当用列替代行时,行列式的值不变。以后凡对于列已經証明了的一切結果对于行都也适用而且反过来也对。

II. 在前一小节中我們看出,两列互換只改变行列式的正負号。这对于行也是一样,就是說,两行(列)互換,行列式的值只改变它的正負号。

III. 如果行列式具有两相同的行,則当它們互換之后,一方面行列式沒有什么改变,另一方面,根据 II,行列式改变正負号,那就是說,如用 Δ 表行列式的值,遂有 $\Delta=-\Delta$ 卽 $\Delta=0$。总之,如果行列式有两行(或列)相同,則它的值等于零。

IV. 变数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的沒有常数項的一次多項式叫做这些变数的綫性齐次函数,就是說它可以表成下面的形式:

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n,$$

其中系数 a_i 与 x_i 无关。这样的函数具有下面两个很明显的性質:

$$\varphi(kx_1, kx_2, \cdots, kx_n) = k\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

$$\varphi(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n) =$$
$$= \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \varphi(y_1, y_2, \cdots, y_n)。$$

后一个性质对于任意多組变数的和也成立。現在回到公式(8)，我們看到，和式(8)中每一項恰好含有每一行的一个元素作为它的因子。由此得出，行列式是任何一行(或任何一列)的元素的綫性齐次函数。

因此，如果某一行(列)的所有元素含有一个公共因子，則可把它提到行列式的記号之外。

对应于表(6)的行列式的値常常記作如我們已經提到过的形式：

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots, & a_{nn} \end{vmatrix}$$

或者簡記作：

$$|a_{ik}| \qquad (i, k=1, 2, \cdots, n)。$$

上述性质对于特殊情形可写成，例如，下面的形式

$$\begin{vmatrix} ka_{11}, & ka_{12}, & ka_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix}。$$

由上述綫性齐次函数的第二个性质得到下面的行列式的性质：如果某一行(列)的元素是相同数目的諸項的和，則这行列式等于一些行列式的和，和中的每个行列式是将上面提到的那一行(列)換成单独的一項而得到的。例如

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c+c' \\ d, & e, & f+f' \\ g, & h, & i+i' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a, & b, & c \\ d, & e, & f \\ g, & h, & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a, & b, & c' \\ d, & e, & f' \\ g, & h, & i' \end{vmatrix}。$$

我們再讲一个由綫性和齐次性得来的直接推論。如果某一行(列)的元素全等于零，則行列式等于零。

V. 如果从表(6)划去第 i 行和第 k 列，元素 a_{ik} 恰在它們的交叉点上，則剩下 $(n-1)$ 行与 $(n-1)$ 列。这 $(n-1)$ 行和 $(n-1)$ 列作成的 $(n-1)$ 阶行列式叫做 n 阶基本行列式的对应于元素 a_{ik} 的子式。用 Δ_{ik} 来表示这个子式，作下面的乘积：

$$A_{ik}=(-1)^{i+k}\Delta_{ik}, \tag{17}$$

它叫做元素 a_{ik} 的代数余子式。現在来証明，这些代数余子式就是在上面所提到的性质中的綫性齐次函数的系数，这就是說，对于任意第 i 行下面的公式成立：

$$\Delta=A_{i1}a_{i1}+A_{i2}a_{i2}+\cdots+A_{in}a_{in} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n), \tag{18}$$

而且对于任意第 k 列——有公式：

$$\Delta=A_{1k}a_{1k}+A_{2k}a_{2k}+\cdots+A_{nk}a_{nk} \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n), \tag{19}$$

其中 Δ 表行列式的值。換句話說，我們需要証明，如果在和(8)中我們归并含有某一固定元素 a_{ik} 的所有項，則这个元素的系数应該是由公式(17)所定义的它的代数余子式 A_{ik}。先用 B_{ik} 表 a_{ik} 的系数，并且要首先指出，这个系数是一些 $(n-1)$ 个元素的乘积的和，其中每一个乘积已不再含有位于第 i 行以及第 k 列的元素。

首先看 $i=k=1$ 的情形，在和(8)中含有元素 a_{11} 的所有的項的和可写成

$$a_{11}\sum_{(p_2,\cdots,p_n)}(-1)^{[1,p_2,\cdots,p_n]}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

这里的和数是关于数 $2,\ 3,\ \cdots,\ n$ 作所有可能的排列 $p_2,\ p_3,\ \cdots,\ p_n$ 所得到的項相加而成的。在完全的排列 $1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$ 中第一个元素1对于其余的数而言总是处在順序的位置。所以对于逆序的个数我們得到等式

$$[1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n]=[p_2,\ \cdots,\ p_n],$$

这里对于两种排列都是以升序的排列作为基本排列的。如此我們

得到 a_{11} 的系数的表达式如下：

$$B_{11}=\sum_{(p_2,p_3,\cdots,p_n)}(-1)^{[p_2,\cdots,p_n]}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}。$$

这个和是与行列式的定义相符合的。但是将它与原来的行列式比较缺了第一行和第一列。由此看出，

$$B_{11}=\Delta_{11}=(-1)^{1+1}\Delta_{11}=A_{11}。$$

就是說，当 $i=k=1$ 时，我們的論断已經証明了。現在来看 i 与 k 为任意的情况。将第 i 行依次与它上面的行調换，使得它最后被移到第一行的位置。这需要作 $(i-1)$ 个行的調换。用完全同样的方法，再把第 k 列移到第一列的位置。經过这样的調换以后，元素 a_{ik} 移到左上角元素 a_{11} 的位置。第 i 行变成第 1 行，第 k 列变成第 1 列而其余的行与列的次序不变。由上面所得到的結果得知，經过剛才的調换以后，a_{ik} 的系数等于 Δ_{ik}。但是，为了完成这样的調换，必須应用 $(i-1)+(k-1)$ 次行与行以及列与列的調换。而且每一个这样的調换使行列式添加一个 (-1) 的因子。因此，总共添加了因子

$$(-1)^{(i-1)+(k-1)}=(-1)^{i+k},$$

所以 B_{ik} 的最后表达式是

$$B_{ik}=\frac{\Delta_{ik}}{(-1)^{i+k}}=(-1)^{i+k}\Delta_{ik}=A_{ik},$$

至此証明完成。如此，我們証明了公式(18)与(19)。如果我們在行列式 Δ 中用数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 依次代替第 i 行的元素而不改变其余的行，則在公式(18)中因子 A_{is} 不改变而新行列式的值为

$$\Delta'=A_{i1}c_1+A_{i2}c_2+\cdots+A_{in}c_n。\qquad(20)$$

特别是，如果我們令 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 依次等于另一行的元素 $a_{j1}, a_{j2}, \cdots, a_{jn}$ 而 $j\neq i$，則行列式 Δ' 的第 i 行与第 j 行相同。因而它的值等于零：$\Delta'=0$，就是說

$$A_{i1}a_{j1}+A_{i2}a_{j2}+\cdots+A_{in}a_{jn}=0\qquad(i\neq j)。\qquad(21_1)$$

把同样的方法用于列，于是有

$$A_{1k}a_{1l}+A_{2k}a_{2l}+\cdots+A_{nk}a_{nl}=0 \qquad (k\neq l)。 \qquad (21_2)$$

式(18)、(19)及(21) 說明了一个对于以后很重要的行列式的性质。

如果由某一行（列）的元素各乘以它們的代数余子式，然后把这些乘积加起来，则所得的和等于行列式的值。如果由某一行(列)的元素各乘以另一行（列）的相当元素的代数余子式，然后把这些乘积加起来，则所得的和等于零。

VI. 我們把行列式 Δ 的第二行的元素乘以同一因子 p 之后，把它加到第一行，此时行列式的第一行的元素变成

$$a_{1s}+pa_{2s} \qquad (s=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

由于性质 IV，新行列式等于两个行列式的和：一个是原来的，另一个是这样的一个行列式，它的第一行的元素是

$$pa_{2s} \qquad (s=1,\ 2,\ \cdots,n),$$

而其余各行与原来行列式 Δ 的相当行相同。把第一行的公共因子 p 提出以后，于是第一行与第二行相同，因此，这个行列式的值为零，总的說来，就是：如果将某一行(列)乘以一个公共因子，把这結果加到另一行（列），则所得到的行列式的值仍与原来的行列式的值相等。

現在来讲一些以后要用到的記号。与以前一样，假設給了一个正方形的表(6)，且令 l 为不超过 n 的正整数。由表(6)中的带有号碼 $p_1, p_2, \cdots, p_l$ 的 l 行与带有号碼 $q_1, q_2, \cdots, q_l$ 的 l 列所組成的 l 阶行列式用下面的記号来表示：

$$A\begin{pmatrix}p_1, p_2, \cdots, p_l\\ q_1, q_2, \cdots, q_l\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}a_{p_1q_1}, & a_{p_1q_2}, & \cdots, & a_{p_1q_l}\\ a_{p_2q_1}, & a_{p_2q_2}, & \cdots, & a_{p_2q_l}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{p_lq_1}, & a_{p_lq_2}, & \cdots, & a_{p_lq_l}\end{vmatrix} \qquad (22)$$

在这里通常把任何一个数 a 本身就叫做对应于这个数的一阶行列式，即 $A\binom{p}{q}=a_{pq}$。正整数列 $p_1, p_2, \cdots, p_l$ 与 $q_1, q_2, \cdots, q_l$ 可以不必按照 p_s 与 q_s 的上升的次序安排。如果这两个数列皆是按照上升次序排列的，則行列式(22)叫做行列式(8)的一个 l 阶子式。行列式(22)可以从行列式(8)去掉 $(n-l)$ 行与 $(n-l)$ 列而得到。假設这些被去掉的行与列的号碼按上升次序写出是：$r_1, r_2, \cdots, r_{n-l}$，与 $s_1, s_2, \cdots, s_{n-l}$。則子式

$$A\begin{pmatrix} r_1, & r_2, & \cdots, & r_{n-l} \\ s_1, & s_2, & \cdots, & s_{n-l} \end{pmatrix}$$

叫做子式(22)的余子式，而表达式

$$(-1)^{p_1+p_2+\cdots+p_l+q_1+q_2+\cdots+q_l}A\begin{pmatrix} r_1, & r_2, & \cdots, & r_{n-l} \\ s_1, & s_2, & \cdots, & s_{n-l} \end{pmatrix} \qquad (22_1)$$

叫做子式(22)的代数余子式。对于单独的元素 a_{ik}，这个代数余子式的定义与原来的定义(17)一致。

代数余子式(22_1)記作

$$A'\begin{pmatrix} p_1, & p_2, & \cdots, & p_l \\ q_1, & q_2, & \cdots, & q_l \end{pmatrix}。$$

它被給定的行列式(22)完全决定，就是説，被給定的行的号碼序列 $p_1, p_2, \cdots, p_l$ 以及列的号碼序列 $q_1, q_2, \cdots, q_l$ 完全决定。

我們固定行的号碼。行列式 Δ 的値显然是这些行的元素的 l 次齐次多項式，行列式 Δ 可表成下式，它是可以証明的(拉普拉斯定理)：

$$\Delta=\sum_{q_1<q_2<\cdots<q_l} A\begin{pmatrix} p_1, & p_2, & \cdots, & p_l \\ q_1, & q_2, & \cdots, & q_l \end{pmatrix} A'\begin{pmatrix} p_1, & p_2, & \cdots, & p_l \\ q_1, & q_2, & \cdots, & q_l \end{pmatrix}, \qquad (23)$$

这里的和数是对从数列 $1, 2, \cdots, n$ 取出的所有可能上升的数列 $q_1, q_2, \cdots, q_l$ 求和。在和(23)中項的总数等于从 n 个元素中取 l 个的組合总数：

$$C_n^l=\frac{n(n-1)\cdots(n-l+1)}{l!},$$

这是因为数 q_s 在和(23)中已被規定了按上升的次序排列，q_s 的次序因此在計算和(23)的項的总数时不起任何作用。当 $l=1$ 时，$A\binom{p_1}{q_1}=a_{p_1q_1}$，公式(23)卽变成当 $i=p_1$ 时的公式(18)。公式(23)可以說是将 Δ 按行展开。如果我們将 Δ 按列展开，卽可得到与(23)类似的公式。这是容易作出的，以后我們将不利用公式(23)而且不打算証明它。

4. 行列式的計算 二阶行列式的計算是很簡单的。先写出表而且暂时划上实綫与虛綫如下图

$$\left\|\begin{array}{cc} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}\right\|$$

按照公式(11)，則行列式的值等于实綫上元素的乘积减去虛綫上元素的乘积。

再看三阶行列式。在公式(3)中我們写出了三阶行列式的展开的形式。不难驗証，它可以用下面的方法作出来：先把决定行列式的表写出，然后在它下面把第一与第二两行重写一次。

$$\left\|\begin{array}{ccc} a_{11}, & a_{12}, & a_{23}, \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, \\ a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, \end{array}\right\|$$

于是我們得到一个具有六根对角綫的表，其中每一根对角綫把三个元素連成一組。取位于实对角綫上三元素的乘积而不改号，取位于虛对角綫上元素的乘积而加上負号。然后把这六个积加起来即得行列式的值(沙魯斯法則)。

这样的法則不能推广到較高阶的行列式。因此，为了縮短計算，必須另想办法。例如，利用在前一小节所提到的行列式性质 VI 是有效的。我們用一个例来說明这一点。取四阶行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3, & 5, & 1, & 0 \\ 2, & 1, & 4, & 5 \\ 1, & 7, & 4, & 2 \\ -3, & 5, & 1, & 1 \end{vmatrix}。$$

我們把第三行乘以(-2)加到第二行；此外，把第三行的3倍加到第四行，再从第一行减去第三行的3倍。这样一来，根据剛才提到的性质，原来行列式即被化成下面的等值的行列式，其中第一列有三个零

$$\Delta=\begin{vmatrix}0, & -16, & -11, & -6\\ 0, & -13, & -4, & 1\\ 1, & 7, & 4, & 2\\ 0, & 26, & 13, & 7\end{vmatrix}。$$

于是，按第一列展开，根据公式(19)，得到：

$$\Delta=\begin{vmatrix}-16, & -11, & -6\\ -13, & -4, & 1\\ 26, & 13, & 7\end{vmatrix}。$$

把第三列的4倍加到第二列，然后把第三列的13倍加到第一列。就得到：

$$\Delta=\begin{vmatrix}-94, & -35, & -6\\ 0, & 0, & 1\\ 117, & 41, & 7\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-94, & -35\\ 117, & 41\end{vmatrix}=94\times41-35\times117=-241。$$

5. 例 I. 假設需要計算一个平行六面体的体积，从一个頂点出发的它的三边是矢量 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$。如[**II, 105**]所知道的，所求的体积可表成矢量 $\boldsymbol{A}$ 与矢量积 $(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 的数量积：

$$V=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})。\tag{24}$$

在这里，如果矢量 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 的轉向与坐标軸的轉向相同，則所求得的体积带正号，如果两者的轉向相反，則所求得的体积带負号。矢量积 $(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 的三分量为

$$B_yC_z-B_zC_y,\quad B_zC_x-B_xC_z,\quad B_xC_y-B_yC_x,$$

因此，公式(24)中的数量积为

$$A_x(B_yC_z-B_zC_y)+A_y(B_zC_x-B_xC_z)+A_z(B_xC_y-B_yC_x)。$$

不难看出，这个和就是一个三阶行列式，即

$$\begin{vmatrix}A_x, & B_x, & C_x\\ A_y, & B_y, & C_y\\ A_z, & B_z, & C_z\end{vmatrix}。\tag{25}$$

这个行列式等于零即表示体积等于零，換句話說，即表示三矢量共面，就是說，它們在一平面上。如果我們把行列式中的两行(列)調

換，例如第一与第二列調換，則原来的次序 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 換成另外的次序 $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C}$。这样一来，如果原来次序的矢量与坐标軸有相同的轉向，則現在它們与坐标軸有相反的轉向；而且反过来也对。与此相当的是行列式的值变号。

如果用类似的方法在平面 XY 上去考察分量为 (A_x, A_y) 与 (B_x, B_y) 的两个矢量，則由这两个矢量作成的平行四边形的面积等于二阶行列式

$$P=\begin{vmatrix} A_x, & B_x \\ A_y, & B_y \end{vmatrix}。$$

現在来考察三角形，它的頂点坐标为

$$M_1(x_1, y_1),\ M_2(x_2, y_2),\ M_3(x_3, y_3)。$$

取矢量 $\boldsymbol{A}=\overline{M_1M_2}$ 与 $\boldsymbol{B}=\overline{M_1M_3}$，它們的分量各为：

$$\overline{M_1M_2}(x_2-x_1, y_2-y_1),\ \overline{M_1M_3}(x_3-x_1, y_3-y_1),$$

于是上述三角形的面积即可表成

$$P=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1, & x_3-x_1 \\ y_2-y_1, & y_3-y_1 \end{vmatrix}。$$

不难証明，上述二阶行列式可換写成三阶行列式而且可以把公式用下面的形式写出来：

$$P=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ y_1, & y_2, & y_3 \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix}。$$

这个行列式等于零是三点 M_1, M_2, M_3 在一直綫上的条件。換句話説，通过两已知点 (x_1, y_1) 与 (x_2, y_2) 的直綫方程可以写成下面的形式：

$$\begin{vmatrix} x, & x_1, & x_2 \\ y, & y_1, & y_2 \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix}=0。$$

II．利用行列式，不难作出某些几何軌迹的方程。例如，求通过三已知点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) 与 (x_3, y_3) 的圓的方程。容易看出，借助于四阶行列式，这个方程可写成下面的形式：

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2, & x_1^2+y_1^2, & x_2^2+y_2^2, & x_3^2+y_3^2 \\ x, & x_1, & x_2, & x_3 \\ y, & y_1, & y_2, & y_3 \\ 1, & 1, & 1, & 1 \end{vmatrix}=0。\tag{26}$$

实际上，只要按第一列展开，就可看出上述方程是一个二次方程，其中 x^2 与 y^2 的系数相同而且缺乘积 xy 这一項，就是說，方程(26)表示一个圓。最后，如果我們在这个方程中作代換 $x=x_k$ 与 $y=y_k(k=1, 2, 3)$，則行列式中的第一列将与另外的某一列相同，因此方程卽被滿足，就是說，这个圓确实通过这三个已知点。需要注意的是，如果这三个已知点在一直綫上，則在方程(26)中 (x^2+y^2) 的系数变成零，因此方程不再表示一个圓而是一根直綫。

完全一样，在具有坐标軸 OX，OY，OZ 的空間內，通过三已知点 (x_1, y_1, z_1)，(x_2, y_2, z_2) 与 (x_3, y_3, z_3) 的平面的方程可以用四阶行列式写成下面的形式：

$$\begin{vmatrix} x, & x_1, & x_2, & x_3 \\ y, & y_1, & y_2, & y_3 \\ z, & z_1, & z_2, & z_3 \\ 1, & 1, & 1, & 1 \end{vmatrix}=0。\tag{27}$$

如果三已知点在一直綫上，則方程(27)变成恒等式 $0=0$。

III．現在来看一个 n 阶行列式 D_n，它的每一行是由某一个数的零次幂直到 $(n-1)$ 次幂所組成：

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1^{n-1}, & x_1^{n-2}, & \cdots, & x_1, & 1 \\ x_2^{n-1}, & x_2^{n-2}, & \cdots, & x_2, & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n^{n-1}, & x_n^{n-2}, & \cdots, & x_n, & 1 \end{vmatrix}。\tag{28}$$

当 $n=1$ 和 2 时，即有

$$D_1=1;\quad D_2=x_1-x_2。$$

为了展开行列式 D_3，在行列式的第一行內我們用 x 替換 x_1。于是得到下面的行列式：

$$D_3(x)=\begin{vmatrix}x^2, & x, & 1\\ x_2^2, & x_2, & 1\\ x_3^2, & x_3, & 1\end{vmatrix}。$$

如按第一行展开时，即可看到，$D_3(x)$ 是 x 的二次多項式。如果在行列式中施行代換 $x=x_2$ 或 $x=x_3$，則第一行即分別与第二行或第三行相同，因而行列式的值为零，就是說，二次三項式 $D_3(x)$ 具有两根 x_2 与 x_3，因而可写成

$$D_3(x)=A_3(x-x_2)(x-x_3),$$

其中 A_3 是 x^2 的系数，也就是行列式 $D_3(x)$ 的元素 x^2 的代数余子式，x^2 是在行列式的左上角，因此得到

$$A_3=\begin{vmatrix}x_2, & 1\\ x_3, & 1\end{vmatrix},$$

就是說，A_3 等于由数 x_2 与 x_3 組成的行列式 D_2。最后得到：

$$D_3(x)=(x_2-x_3)(x-x_2)(x-x_3)。$$

作代換 $x=x_1$，我們即得到将 D_3 表成三因式乘积的表达式

$$D_3=\begin{cases}(x_1-x_2)(x_1-x_3)\\ \qquad\qquad\quad (x_2-x_3)。\end{cases}$$

用完全类似的方法，在有了 D_3 的表达式以后，即可得到 D_4 的表达式。它是六个因式的乘积：

$$D_4=\begin{cases}(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)\\ \qquad\qquad\quad (x_2-x_3)(x_2-x_4)\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad (x_3-x_4)。\end{cases}$$

完全一样，对于任意 n 我們得到下面的 D_n 的表达式：

$$D_n=\begin{cases}(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)\\ \qquad\qquad (x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \qquad\qquad\qquad\qquad (x_{n-1}-x_n)。\end{cases} \tag{29}$$

平常我們把它叫做范德蒙行列式。

上述表达式与行列式的基本定义有一个有趣的关系。任意一个 n 阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} x_{1n}, & x_{1n-1}, & \cdots, & x_{11}\\ x_{2n}, & x_{2n-1}, & \cdots, & x_{21}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_{nn}, & x_{nn-1}, & \cdots, & x_{n1}\end{vmatrix}。 \tag{30}$$

在它里面我們純粹形式地将 x_{ik} 换成 x_i^{k-1}。經过这样的代换以后，行列式(30)显然化成了范德蒙行列式(28)。由此直接得出下面的用以表达行列式 (30) 的那个和的形成法則：先把表达式 (29) 的括号解开，然后把所得到的每一項中的每一个冪 x_k^{s-1} 都用 x_{ks} 代換，而且，如果在这样的項中当某一个数 x_k 不出現时，則在該項中应添上因子 x_k^0，然后把它用 x_{k1} 代換。經过这样的代換以后，由表达式(29)得来的这个和可以用作行列式的定义。

IV．現在来看一个以后与我們有关系的表达式：

$$\varDelta(x)=\begin{vmatrix} a_{11}+x, & a_{12}, & a_{13}, & \cdots, & a_{1n}\\ a_{21}, & a_{22}+x, & a_{23}, & \cdots, & a_{2n}\\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}+x, & \cdots, & a_{3n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1}, & a_{n2}, & a_{n3}, & \cdots, & a_{nn}+x\end{vmatrix}, \tag{31}$$

把它按文字 x 的冪展开。为此，首先把(31)换写成下式：

$$
\Delta(x)=\begin{vmatrix}
a_{11}+x, & a_{12}+0, & a_{13}+0, & \cdots, & a_{1n}+0\\
a_{21}+0, & a_{22}+x, & a_{23}+0, & \cdots, & a_{2n}+0\\
a_{31}+0, & a_{32}+0, & a_{33}+x, & \cdots, & a_{3n}+0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
a_{n1}+0, & a_{n2}+0, & a_{n3}+0, & \cdots, & a_{nn}+x
\end{vmatrix}。 \tag{32}
$$

这个行列式的每一列都是两項的和，只要屡次应用行列式的性质IV，我們卽可把它換写成 2^n 个行列式的和，其中每个行列式的每一列都是单項的。如果在表达式(32)的所有的列中去掉第二項，則我們得到在 $\Delta(x)$ 的展开式中的常数項，就是不含 x 的項：

$$
\Delta=\begin{vmatrix}
a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n}\\
a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots, & a_{nn}
\end{vmatrix}, \tag{33}
$$

反之，如果在所有的列中去掉第一項，則得到多項式 $\Delta(x)$ 的最高次項，就是

$$
\begin{vmatrix}
x, & 0, & 0, & \cdots, & 0\\
0, & x, & 0, & \cdots, & 0\\
0, & 0, & x, & \cdots, & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0, & 0, & 0, & \cdots, & x
\end{vmatrix}=x^n。
$$

現在来看上述多項式的中間項。假設在行列式(32)的第 p_1, p_2, $\cdots$, p_s 这些列中我們取第二項而在其余的列中取第一項，这时号碼为 $p_k(k=1, 2, \cdots, s)$ 的每一列的元素除去一个元素外其余全是0，这个非零元素就是 x，它位于主对角綫上，就是説，它在具有相同号碼的行与列的交点上。当将这样得到的行列式依次按第 p_1, p_2, $\cdots$, p_s 列的元素展开时，于是我們从这些列就得到因子 x^s 而且依次划去了带有号碼 p_1, p_2, $\cdots$, p_s 的行以及带有相同号碼的列。每一次这样划掉以后，对应元素的代数余子式恰好就是行

列式的子式。因为它是由划去同号碼的行与列而得到的。这样一来，对于列的号碼 $p_k(k=1, 2, \cdots, s)$ 的任意一种取法，如上得到的行列式的值是 x^s 的一个单項式，它的系数等于从基本行列式 (33) 划去一些行与列以后所得到的一个 $(n-s)$ 阶行列式。这些被划掉的行与列相交于主对角元素 $a_{p_1p_1}, a_{p_2p_2}, \cdots, a_{p_sp_s}$。我們用記号 $\Delta_{\substack{p_1p_2\cdots p_s\\ p_1p_2\cdots p_s}}$ 来表示这个 $(n-s)$ 阶行列式。通常把这种行列式叫做行列式 Δ 的 $(n-s)$ 阶主子式。当数 $p_1, p_2, \cdots, p_s$ 就各种方式选取时，結果就得到多項式 $\Delta(x)$ 中 x^s 項的系数，这个系数等于所有可能的 $(n-s)$ 阶主子式的和，就是

$$\Delta(x)=x^n+S_1x^{n-1}+S_2x^{n-2}+\cdots+S_{n-1}x+S_n,$$

其中 S_k 等于行列式 Δ 的所有 k 阶主子式的和，特别是，$S_n=\Delta$。系数 S_k 更可詳細地写出如下：

$$S_k=\sum_{p_1<p_2<\cdots<p_{n-k}}^{(1,2,\cdots,n)}\Delta_{\substack{p_1p_2\cdots p_{n-k}\\ p_1p_2\cdots p_{n-k}}}=$$

$$=\sum_{q_1<q_2<\cdots<q_k}\begin{vmatrix} a_{q_1q_1}, & a_{q_1q_2}, & \cdots, & a_{q_1q_k}\\ a_{q_2q_1}, & a_{q_2q_2}, & \cdots, & a_{q_2q_k}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{q_kq_1}, & a_{q_kq_2}, & \cdots, & a_{q_kq_k}\end{vmatrix}。\qquad (34)$$

这里的和数是对从 n 个数 $1, 2, \cdots, n$ 中取 k 个数 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 的所有可能組合所得到的行列式相加而成的，而且 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 是按照上升次序排列的。假如我們在表达式(34)中令每一个 q_j 独立地取从 1 到 n 的值，则在排列 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 中整数的排列次序不只是上升的而且所有其他可能的排列都要出現。精确的說，在由 q_j 独立地取 $1, 2, \cdots, n$ 所得到的和数中，每一个上升的数列产生 $k!$ 个排列。現在应該注意的是，在公式(34)中每个行列式的值并不因任何两个数 q_i 与 q_j 的調換而改变。实际上，例如如果我們調換 q_1 与 q_2，则等于在該行列式中把第一与第二行調換同时把

第一与第二列調換，因此不影响行列式的值。所以，从上面得出：如果在表达式(34)中我們令 q_j 独立地取从1到 n 的值，然后对它們作和数，则和数(34)中每一項恰好重复 $k!$ 次，由此，我們可以将系数 S_k 的表达式写成下式：

$$S_k=\frac{1}{k!}\sum_{q_1=1}^{n}\sum_{q_2=1}^{n}\cdots\sum_{q_k=1}^{n}A\begin{pmatrix}q_1, & q_2, & \cdots, & q_k\\ q_1, & q_2, & \cdots, & q_k\end{pmatrix}。\tag{35}$$

6. 关于行列式乘法的定理 在这一小节中我們来証明两个同阶行列式的乘积的公式。

假定有两个 n 阶行列式：

$$\Delta=|a_{ik}|_1^n \tag{36$_1$}$$

与

$$\Delta_1=|b_{ik}|_1^n。\tag{36$_2$}$$

令

$$c_{ik}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}b_{sk}\quad (i, k=1, 2, \cdots, n)。\tag{37}$$

作一个以 c_{ik} 为元素的新的行列式。我們来証明这个行列式等于行列式(36₁)与(36₂)的积。先証明 $n=2$ 的情形。参照公式(37)，根据[3]中的性质IV，将新的行列式 $|c_{ik}|_1^2$ 展成一些行列式的和，则得

$$\begin{vmatrix}c_{11}, & c_{12}\\ c_{21}, & c_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}, & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}, & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11}b_{11}, & a_{11}b_{12}\\ a_{21}b_{11}, & a_{21}b_{12}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}b_{11}, & a_{12}b_{22}\\ a_{21}b_{11}, & a_{22}b_{22}\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}a_{12}b_{21}, & a_{11}b_{12}\\ a_{22}b_{21}, & a_{21}b_{12}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{12}b_{21}, & a_{12}b_{22}\\ a_{22}b_{21}, & a_{22}b_{22}\end{vmatrix}。$$

当从每一列中提出共同的因子以后，发現第一与第四两行列式各含有相同的列，因此它們皆等于零。只要調换第三个行列式的列，即得到所要証明的等式：

$$\begin{vmatrix} c_{11}, & c_{12} \\ c_{21}, & c_{22} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22}\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix} + b_{12}b_{21}\begin{vmatrix} a_{12}, & a_{11} \\ a_{22}, & a_{21} \end{vmatrix} =$$

$$= b_{11}b_{22}\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix} - b_{12}b_{21}\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12} \\ a_{21}, a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11}, b_{12} \\ b_{21}, b_{22} \end{vmatrix},$$

在阶数 n 为一般的情形，应用[3]中性质 IV，即得：

$$|c_{ik}|_1^n = \sum_{s_1, s_2, \cdots, s_n} \begin{vmatrix} a_{1s_1}b_{s_11}, & a_{1s_2}b_{s_22}, & \cdots, & a_{1s_n}b_{s_nn} \\ a_{2s_1}b_{s_11}, & a_{2s_2}b_{s_22}, & \cdots, & a_{2s_n}b_{s_nn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{ns_1}b_{s_11}, & a_{ns_2}b_{s_22}, & \cdots, & a_{ns_n}b_{s_nn} \end{vmatrix}, \tag{38}$$

其中和号下的变数 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 取整数值 $1, 2, \cdots, n$。这个和的每一項可写成

$$b_{s_11}b_{s_22}\cdots b_{s_nn}\begin{vmatrix} a_{1s_1}, & a_{1s_2}, & \cdots, & a_{1s_n} \\ a_{2s_1}, & a_{2s_2}, & \cdots, & a_{2s_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{ns_1}, & a_{ns_2}, & \cdots, & a_{ns_n} \end{vmatrix}。\tag{39}$$

如果在某一項中的 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 有相同的，則該項中的行列式有相同的列，因此該項即等于零。所以我們只須考虑这样的項，就是其中 s_k 彼此不等的那些項。此时，$s_1, s_2, \cdots, s_n$ 表示数 $1, 2, \cdots, n$ 的某个排列。将表达式(39)乘以因子 $(-1)^{[s_1, s_2, \cdots, s_n]}$ 两次，并不改变原来的值，于是这个式子可以写成两个因子的乘积：

$$(-1)^{[s_1, s_2, \cdots, s_n]}\begin{vmatrix} a_{1s_1}, & a_{1s_2}, & \cdots, & a_{1s_n} \\ a_{2s_1}, & a_{2s_2}, & \cdots, & a_{2s_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{ns_1}, & a_{ns_2}, & \cdots, & a_{ns_n} \end{vmatrix} \cdot (-1)^{[s_1, s_2, \cdots, s_n]} b_{s_11}b_{s_22}\cdots b_{s_nn}。$$

在第一个因子里，借一些对换即可把排列 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 变成排列 $1, 2, \cdots, n$。对于每一次对换，$(-1)^{[s_1, s_2, \cdots, s_n]}$ 与上面写出的行列式都各改一次号，所以整个第一个因子不改变。这样一来，表达

式(39)可以写成下式

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots, & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot (-1)^{[s_1, s_2, \cdots, s_n]} b_{s_1 1} b_{s_2 2} \cdots b_{s_n n},$$

因此,和(38)即可写成下式:

$$|c_{ik}|_1^n = \varDelta \sum_{(s_1, s_2, \cdots, s_n)} (-1)^{[s_1, s_2, \cdots, s_n]} b_{s_1 1} b_{s_2 2} \cdots b_{s_n n},$$

其中和数是对于数 1, 2, …, n 的所有排列求和。这个和等于行列式 $\varDelta_1$，就是說，$|c_{ik}|_1^n = \varDelta\varDelta_1$，这就是所要証的。关于 c_{ik} 的公式(37)可表述如下：行列式 $\varDelta$ 的第 i 行的元素与第二个行列式的第 k 列的相当元素相乘,然后把这些乘积相加起来所得的和数就是 c_{ik}。我們知道，在一个行列式中将行与列調換，行列式的値仍不改变。由是，上述的行与列相乘的法則可以用其他三种法則的任一种来替代：行与行、或列与列、或列与行相乘的法則。类似的定理对于任意 n 阶行列式皆成立。

最后叙述定理如下：假設有两个 n 阶行列式：

$$|a_{ik}| \text{ 与 } |b_{ik}|。$$

作新的行列式

$$|c_{ik}|,$$

它的元素是按照下列任一种公式計算出来的：

$$c_{ik} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sk} \tag{40_1}$$

$$c_{ik} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{ks} \quad (i, k = 1, 2, \cdots, n), \tag{40_2}$$

$$c_{ik} = \sum_{s=1}^{n} a_{si} b_{sk} \tag{40_3}$$

$$c_{ik} = \sum_{s=1}^{n} a_{si} b_{ks}。 \tag{40_4}$$

于是，行列式 $|c_{ik}|$ 的値等于行列式 $|a_{ik}|$ 与 $|b_{ik}|$ 的値的乘积。

例　与基本行列式

$$\Delta=|a_{ik}|$$

同时，我們来考虑它的元素的代数余子式作元素的行列式

$$|A_{ik}|。$$

按照上述定理中的行与行相乘的公式，将乘积 $|a_{ik}|\cdot|A_{ik}|$ 表示成行列式，这个行列式的元素就是

$$c_{ik}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}A_{ks}。$$

按照行列式的性质 V，我們得到：

$$c_{ik}=0 \text{ 当 } i\neq k,\ c_{ii}=\Delta,$$

就是說，

$$|a_{ik}|\cdot|A_{ik}|=\begin{vmatrix}\Delta, & 0, & 0, & \cdots, & 0\\ 0, & \Delta, & 0, & \cdots, & 0\\ 0, & 0, & \Delta, & \cdots, & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0, & 0, & 0, & \cdots, & \Delta\end{vmatrix}$$

或者，不难看出：

$$|a_{ik}|_1^n|A_{ik}|_1^n=\Delta^n,\ \text{即}\ \Delta|A_{ik}|_1^n=\Delta^n。$$

当 Δ 不等于零时，可从两端消去 Δ，得

$$|A_{ik}|_1^n=\Delta^{n-1}。\tag{41}$$

如果元素 $a_{ik}=a_{ik}^{(0)}$ 使得行列式 Δ 等于零，则可以这样选擇 a_{ik} 的值使得一方面 a_{ik} 与 $a_{ik}^{(0)}$ 可任意接近而另一方面使得行列式 Δ 的值不等于零。对于这样的值 a_{ik} 公式 (41) 总是成立的，因此，当令 $a_{ik}\to a_{ik}^{(0)}$ 时取极限，这公式当 $a_{ik}=a_{ik}^{(0)}$ 时也成立，就是說，这公式当 $\Delta=0$ 时也成立。如果将 Δ 与 A_{ik} 用元素 a_{ik} 表出，则公式 (41) 是元素 a_{ik} 的一个恒等式。

7. 长方形表　以后我們将会遇到这样的一种数表，其中行与列的数目可能是不相同的。現在来考虑这种較为普遍的表：

$$\left\|\begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots, & a_{mn} \end{matrix}\right\|。 \tag{42}$$

它含有 m 行与 n 列，而 m 与 n 可能不同也可能相同。从表中去掉某些行与列，使得剩下的行与列的数目相等，我們就可以把剩下的行与列組成一个行列式。这样得到的行列式叫做含于表(42)內的行列式。这些行列式可能具有的最大的阶数显然等于 m 与 n 两数中的較小的一个，而这些行列式的最小的阶数等于一，并且一阶行列式就是表(42)中的元素本身。假定所有含于表中的 l 阶行列式全等于零。不难看出，所有含于表中的 $(l+1)$ 阶行列式也就全等于零。实际上，每一个这样的 $(l+1)$ 阶行列式可以表成它的某一行元素与这些元素的代数余子式乘积的和。但是代数余子式与表中某一 l 阶行列式至多差一个正負号。由是，它們全等于零，所以所有 $(l+1)$ 阶行列式全等于零。既然所有 $(l+1)$ 阶行列式等于零，則如上可証所有 $(l+2)$ 阶行列式也全等于零，依此类推，那末，如果含于表中的某一确定的阶的所有行列式全等于零，則所有該表的較高阶的行列式也全等于零。

現在引进对于将来很重要的关于表的秩这个概念，或如一般所說的，关于矩陣 (42) 的秩的概念。表(42)中的所有不等于零的行列式的阶的最大者叫做該表的秩，就是說，如果表的秩为 k，則在含于表中的 k 阶行列式中至少有一个不等于零，而表中的所有 $(k+1)$ 阶行列式全等于零。

假設除了表(42)外还有一个 n 行 m 列的表：

$$\left\|\begin{matrix} b_{11}, & b_{12}, & \cdots, & b_{1m} \\ b_{21}, & b_{22}, & \cdots, & b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1}, & b_{n2}, & \cdots, & b_{nm} \end{matrix}\right\|。 \tag{43}$$

作 m^2 个数

$$c_{ik}=\sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sk} \quad (i, k=1, 2, \cdots, m)。 \tag{44}$$

以这些数 c_{ik} 作元素所組成的正方表通常叫做长方表 (42) 与 (43) 的乘积。

下列定理是关于行列式乘法定理的一个推广：

定理 如果 $m \leqslant n$，则

$$|c_{ik}|_1^m=\sum_{r_1<r_2<\cdots<r_m} A\begin{pmatrix}1, & 2, & \cdots, & m \\ r_1, & r_2, & \cdots, & r_m\end{pmatrix} B\begin{pmatrix}r_1, & r_2, & \cdots, & r_m \\ 1, & 2, & \cdots, & m\end{pmatrix}, \tag{45}$$

这个包含着所有这样子的项，在每一項中的 $r_1, r_2, \cdots, r_m$ 都是从数 $1, 2, \cdots, n$ 取出来的，而且适合累加号下的不等式。如果 $m>n$，則行列式 $|c_{ik}|_1^m$ 等于零。

記号 $A\begin{pmatrix}1, & 2, & \cdots, & m \\ r_1, & r_2, & \cdots, & r_m\end{pmatrix}$ 与 $B\begin{pmatrix}r_1, & r_2, & \cdots, & r_m \\ 1, & 2, & \cdots, & m\end{pmatrix}$ 的意义在[3]中已經說明过了。其中第二个記号所表示的行列式是由表(43)中位于 $r_1, r_2, \cdots, r_m$ 各行与 $1, 2, \cdots, m$ 各列上的元素所組成的。当 $m=n$ 时，公式 (45) 中的和仅包含 $r_1=1, r_2=2, \cdots, r_m=m$ 的这一項，此时公式(45)就变成了关于行列式乘积的定理。

先看 $m<n$ 的情形。公式(45)的証明与关于行列式乘法定理的証明是类似的。与(38)，(39)相仿，在这里我們有

$$|c_{ik}|_1^m=\sum_{s_1, \cdots, s_m} A\begin{pmatrix}1, & 2, & \cdots, & m \\ s_1, & s_2, & \cdots, & s_m\end{pmatrix} b_{s_1 1} b_{s_2 2} \cdots b_{s_m m}, \tag{46}$$

其中每一个 s_k 要取 $1, 2, \cdots, n$ 諸值，并且凡有相等的 s_k 出現的那些項都可以不写，因为这些項全等于零。从数 $1, 2, \cdots, n$ 中取任何一个固定数列 $r_1<r_2<\cdots<r_m$，而且从和(46)中提出那一些項，其中每項的 $s_1, s_2, \cdots, s_m$ 恰是这 m 个数 $r_1, r_2, \cdots, r_m$ 的一个排列。这样我們就得到和(46)的一部分：

$$\sum_{[t_1, t_2, \cdots, t_m]} A\begin{pmatrix}1, & 2, & \cdots, & m \\ t_1, & t_2, & \cdots, & t_m\end{pmatrix} b_{t_1 1} b_{t_2 2} \cdots b_{t_m m}, \tag{47}$$

其中和数是对于数 $r_1, r_2, \cdots, r_m$ 的所有排列 $t_1, t_2, \cdots, t_m$ 求和。将和(47)中每一項乘以 $(-1)^{[t_1, t_2, \cdots, t_m]}$ 两次，完全与在[6]中所作的一样，我們同样証明，这个和等于

$$A\begin{pmatrix}1, & 2, & \cdots, & m\\ r_1, & r_2, & \cdots, & r_m\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}r_1, & r_2, & \cdots, & r_m\\ 1, & 2, & \cdots, & m\end{pmatrix}。$$

我們只要把这种乘积对所有可能的取法 $r_1<r_2<\cdots<r_m$ 相加起来，就得到公式(46)中右端的全部，也就是証明了公式(45)。最后，假設 $m>n$。此时我們在表(42)中添上完全由零組成的 $(m-n)$ 列，而在表(43)中添上完全由零組成的 $(m-n)$ 行。如果在这样添加以后，不是按公式(44)而是按下面的公式来計算 c_{ik}：

$$c_{ik}=\sum_{s=1}^{m} a_{is}b_{sk} \quad (i, k=1, 2, \cdots, m), \qquad (48)$$

则我們仍然得到原来的值 c_{ik}，因为在(48)的右端所添加的部分等于零。另一方面，在上述添加以后，表(42)与(43)卽变成正方表，而与它們对应的行列式都等于零。因此，按照关于行列式乘法的定理，行列式 $|c_{ik}|_1^m$ 等于零，定理卽完全証明。

附注　如果有两个长方表各有 m 行与 n 列，则当按照行与行相乘的公式：

$$c_{ik}=\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{ks} \quad (i, k=1, 2, \cdots, m),$$

卽得行列式 $|c_{ik}|_1^m$，它的值当 $m>n$ 时等于零，当 $m<n$ 时由下列公式表出：

$$|c_{ik}|_1^m=\sum_{r_1<r_2<\cdots<r_m} A\begin{pmatrix}1, & 2, & \cdots, & m\\ r_1, & r_2, & \cdots, & r_m\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}1, & 2, & \cdots, & m\\ r_1, & r_2, & \cdots, & r_m\end{pmatrix}。$$

系　假設有两个 n 阶方表，它們分别由元素 a_{ik} 及 b_{ik} 組成，而数 c_{ik} 是按照公式(44)来規定的，現在我們把行列式 $|c_{ik}|_1^n$ 的子式 $C\begin{pmatrix}p_1, & p_2, & \cdots, & p_l\\ q_1, & q_2, & \cdots, & q_l\end{pmatrix}$ 用行列式 $|a_{ik}|_1^n$ 及 $|b_{ik}|_1^n$ 的子式表达出来。不

难看出，作成子式 $C\begin{pmatrix}p_1, p_2, \cdots, p_l\\ q_1, q_2, \cdots, q_l\end{pmatrix}$ 的方表是下列两长方表的乘积：

$$\begin{Vmatrix} a_{p_11}, & a_{p_12}, & \cdots, & a_{p_1n}\\ a_{p_21}, & a_{p_22}, & \cdots, & a_{p_2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{p_l1}, & a_{p_l2}, & \cdots, & a_{p_ln}\end{Vmatrix} \text{与} \begin{Vmatrix} b_{1q_1}, & b_{1q_2}, & \cdots, & b_{1q_l}\\ b_{2q_1}, & b_{2q_2}, & \cdots, & b_{2q_l}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{nq_1}, & b_{nq_2}, & \cdots, & b_{nq_l}\end{Vmatrix}。$$

应用刚才証明过的定理，我們得到所要求的表达式：

$$C\begin{pmatrix}p_1, p_2, \cdots, p_l\\ q_1, q_2, \cdots, q_l\end{pmatrix} = \sum_{r_1<r_2<\cdots<r_l} A\begin{pmatrix}p_1, p_2, \cdots, p_l\\ r_1, r_2, \cdots, r_l\end{pmatrix}\cdot B\begin{pmatrix}r_1, r_2, \cdots, r_l\\ q_1, q_2, \cdots, q_l\end{pmatrix}, \tag{49}$$

其中 r_k 取数 1, 2, …, n 的值。設 R_A, R_B, R_C 分别为表 $\|a_{ik}\|_1^n$, $\|b_{ik}\|_1^n$ 与 $\|c_{ik}\|_1^n$ 的秩。譬如說，如果 $R_A<n$ 而且在公式 (49) 中令 $l>R_A$，则所有 $A\begin{pmatrix}p_1, p_2, \cdots, p_l\\ r_1, r_2, \cdots, r_l\end{pmatrix}$ 根据 R_A 的定义全等于零，因此，所有 $C\begin{pmatrix}p_1, p_2, \cdots, p_l\\ q_1, q_2, \cdots, q_l\end{pmatrix}$ 全等于零。由此推出，$R_C<l$，即 $R_C\leqslant R_A$。如果表 $\|a_{ik}\|_1^n$ 的秩等于 n，则显然有 $R_C\leqslant R_A$，或 $R_C\leqslant n$。同样可証 $R_C\leqslant R_B$。将来我們还要証明，如果行列式 $|b_{ik}|_1^n\neq0$，则 $R_C=R_A$，而且如果 $|a_{ik}|_1^n\neq0$，则 $R_C=R_B$。

§2. 方程組的解法

8. 克兰姆定理 在行列式的概念建立以后，并且也闡明了它的基本性质，我們現在轉到这个概念对于解綫性方程組的应用。首先让我們考虑基本的情形，就是方程与未知数的数目相等的情形。含有 n 个方程和 n 个未知数的方程組可用下列形式写出来：

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n。 \end{array}\right\} \quad (1)$$

其中系数的記法正如我們在 [1] 中对于具有三个未知数的三个方程的情形所引用过的一样。我們先作一个假定，就是假定方程組的行列式，即相当于由方程組的系数 a_{ik} 組成的表的行列式，不等于零

$$\Delta=|a_{ik}|\neq 0。\quad (2)$$

将方程組(1)的两端乘以这行列式的第 k 列元素的代数余子式，就是說，将方程組的第一个方程的两端乘以 A_{1k}，第二个乘以 A_{2k}，如此类推。然后把这样得到的方程加起来。結果我們得到这样一个方程，它的右端是和数

$$A_{1k}b_1+A_{2k}b_2+\cdots+A_{nk}b_n,$$

而它的左端每个未知数 x_l 的系数由下列的和数表示

$$A_{1k}a_{1l}+A_{2k}a_{2l}+\cdots+A_{nk}a_{nl} \qquad (l=1, 2, \cdots, n)。$$

这些和数当 $l\neq k$ 时等于零，而当 $l=k$ 时等于 Δ，就是說，我們得到下列形式的方程：

$$\Delta\cdot x_k=A_{1k}b_1+A_{2k}b_2+\cdots+A_{nk}b_n。$$

对于每个指标 k 都这样作，我們就由方程組(1)得到新方程組

$$\Delta\cdot x_k=A_{1k}b_1+A_{2k}b_2+\cdots+A_{nk}b_n \quad (k=1, 2, \cdots, n)。\quad (3)$$

不难証明，反轉来，方程組(1)也可以从方程組(3)推出来。实际上，以 a_{lk} 乘方程(3)的两端，然后按 k 从1到 n 相加起来。仍然利用行列式的性质 V，就得到下面这方程

$$\Delta\cdot(a_{l1}x_1+a_{l2}x_2+\cdots+a_{ln}x_n)=\Delta\cdot b_l, \quad (4)$$

因 $\Delta\neq 0$，可从方程两端将 Δ 消去，由此即得方程組(1)中的第 l 个方程，而且对于任意的 l (当然 l 只能取1到 n 的值)都可这样

作。于是方程組(1)与(3)是等价的,就是說,它們的解全同。因此我們解方程組(3)即等于解方程組(1)。方程組(3)显然有解而且只有一解,可由下列公式計算出来:

$$x_k=\frac{A_{1k}b_1+A_{2k}b_2+\cdots+A_{nk}b_n}{\Delta}\quad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)。\qquad(5)$$

必須注意到,按照[3]中所述,上述表达式中的分子是这样的行列式,就是在行列式 Δ 中將第 k 列的元素,也就是將 x_k 的系数 a_{ik} 用常数項 b_i 替换所得到的行列式。因此我們得到下面的定理。

克兰姆定理 如果方程組(1)的行列式 Δ 不等于零,則这个方程組有一个确定的解,它可由公式(5)表达出来。按照这个公式每个未知数的值可表成两个行列式的商,而分母就是方程組的行列式 Δ,分子就是在行列式 Δ 中將該未知数的每个系数用相当的常数項替换所得的行列式。

当方程的个数很多时,克兰姆定理用起来不方便,而有其他的近似的实际办法来解具有多个未知数的多个方程的方程組,現在不准备去讲它。

9. 方程組的普遍情形 現在来考虑具有 n 个未知数的 m 个方程的普遍情形:

$$\left.\begin{array}{l}
X_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1q}x_q+a_{1,q+1}x_{q+1}+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\
X_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2q}x_q+a_{2,q+1}x_{q+1}+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
X_p=a_{p1}x_1+a_{p2}x_2+\cdots+a_{pq}x_q+a_{p,q+1}x_{q+1}+\cdots+a_{pn}x_n=b_p\\
X_{p+1}=a_{p+1,1}x_1+a_{p+1,2}x_2+\cdots+a_{p+1,q}x_q+a_{p+1,q+1}x_{q+1}+\\
\qquad\qquad+\cdots+a_{p+1,n}x_n=b_{p+1}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
X_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mq}x_q+a_{m,q+1}x_{q+1}+\\
\qquad\qquad+\cdots+a_{mn}x_n=b_m。
\end{array}\right\}(6)$$

为了以后书写簡短起見,我們用 X_s 代表第 s 个方程的左端。

这方程組的系数 a_{pq} 作成一个长方表,假設 k 是它的秩。只要調换行的次序和列的次序,就是說改变方程的号碼和未知数的号碼,我們就可将表中的某一个不等于零的 k 阶行列式移到表的左上角。这个 k 阶行列式叫做方程組的主行列式。它取下面的形式:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1k} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1}, & a_{k2}, & \cdots, & a_{kk} \end{vmatrix}。\tag{7}$$

然后从主行列式出发,在主行列式下方和右方添加一行和一列,这一行是最后 $(m-k)$ 个方程中任一个的系数而这一列是方程組的常数項,这样就得到 $(m-k)$ 个 $(k+1)$ 阶的行列式,这些行列式叫做方程組的特征行列式。更确切地說,特征行列式的定义如下:

$$\Delta_{k+s}=\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1k}, & b_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2k}, & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1}, & a_{k2}, & \cdots, & a_{kk}, & b_k \\ a_{k+s,1}, & a_{k+s,2}, & \cdots, & a_{k+s,k}, & b_{k+s} \end{vmatrix} \tag{8}$$

$$(k+s=k+1,\ k+2,\ \cdots,\ m)。$$

如果 $k=m$, 就是說,秩等于方程的数目,则根本沒有特征行列式。除了特征行列式,同时还要看另外的一些行列式,那就是在特征行列式中将最后的由常数項构成的一列换成方程的左端:

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1k}, & X_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2k}, & X_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1}, & a_{k2}, & \cdots, & a_{kk}, & X_k \\ a_{k+s,1}, & a_{k+s,2}, & \cdots, & a_{k+s,k}, & X_{k+s} \end{vmatrix}。\tag{9}$$

最后这些行列式除了已知系数 a_{ik} 外还含有未知数 x_j。但是不难証明,行列式(9)恒等于零。实际上,这些行列式的最后一列的元

素，根据

$$X_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n,$$

是由 n 項組成的，因此，按照[3]中性质 IV，每个行列式（9）可表成具有下列形式的項的和：

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1k}, & a_{1j} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2k}, & a_{2j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1}, & a_{k2}, & \cdots, & a_{kk}, & a_{kj} \\ a_{k+s,1}, & a_{k+s,2}, & \cdots, & a_{k+s,k}, & a_{k+s,j} \end{vmatrix} \cdot x_j。$$

不难証明，这个式子中作为 x_j 的系数的行列式等于零。实际上，如果 $j \leqslant k$，則这行列式的最后一列与前面的某一列相同。如果 $j > k$，則該行列式是一个含于表（5）中的 $(k+1)$ 阶行列式，因而它等于零，这是由于假定了該表的秩为 k 的緣故。根据行列式的性质 IV，从特征行列式减去一个恒等于零的行列式（9），我們就可以将特征行列式表成下面的形式：

$$\Delta_{k+s} = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1k}, & b_1 - X_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2k}, & b_2 - X_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1}, & a_{k2}, & \cdots, & a_{kk}, & b_k - X_k \\ a_{k+s,1}, & a_{k+s,2}, & \cdots, & a_{k+s,k}, & b_{k+s} - X_{k+s} \end{vmatrix} \tag{10}$$

$$(k+s = k+1,\ k+2,\ \cdots,\ m),$$

在这个写法中 Δ_{k+s} 只是在形式上看起来依賴于 x_j。現在假設方程組（6）有某一解：

$$x_1 = x_1^{(0)},\ x_2 = x_2^{(0)},\ \cdots,\ x_n = x_n^{(0)}。$$

把 $x_j = x_j^{(0)}$ 代入行列式(10)的最后一列，最后一列就全变成零，就是說，所有特征行列式必須全等于零。

定理 I. 方程組（6）至少有一解的必要条件是，所有的特征行列式（8）全等于零。

現在来証明这条件的充分性，并且給出一个寻找方程組的全

部解的方法。于是，假設所有的特征行列式全等于零。我們把这些特征行列式写成形式(10)，然后按最后一列元素展开。不难看出，元素 $(b_{k+s}-X_{k+s})$ 的代数余子式等于主行列式，它不为零。于是即可把所有特征行列式全等于零这个条件写成下面的形式：

$$a_1^{(k+s)}(b_1-X_1)+a_2^{(k+s)}(b_2-X_2)+\cdots+a_k^{(k+s)}(b_k-X_k)+$$
$$+\Delta(b_{k+s}-X_{k+s})=0\,(k+s=k+1,\ k+2,\ \cdots,\ m),\quad(11)$$

其中 $a_p^{(q)}$ 都是数字系数，对于我們是无关紧要的。

現在假設，方程組的头 k 个方程有某一解。然后把这一解代入恒等式(11)。这时所有的差数

$$b_1-X_1,\ b_2-X_2,\ \cdots,\ b_k-X_k$$

变成零，而且(11)的最后一項也变成零：

$$\Delta\cdot(b_{k+s}-X_{k+s})=0。$$

由于 $\Delta\neq0$，即得

$$b_{k+s}-X_{k+s}=0\quad(k+s=k+1,\ k+2,\ \cdots,\ m),$$

这就是說，証明了下面的結果：如果所有特征行列式等于零，則方程組的头 k 个方程的任一解也适合其余的方程。因此，在这种情形下，我們只需要去解前 k 个方程即可。

先将这些方程中号碼大于 k 的未知数移到等式的右端去，于是这些方程即取下列形式：

$$\left.\begin{array}{l}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1k}x_k=b_1-a_{1,k+1}x_{k+1}-\cdots-a_{1n}x_n\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2k}x_k=b_2-a_{2,k+1}x_{k+1}-\cdots-a_{2n}x_n\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\cdots+a_{kk}x_k=b_k-a_{k,k+1}x_{k+1}-\cdots-a_{kn}x_n。\end{array}\right\}\quad(12)$$

将(12)看作求解 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k$ 的方程組。已知它的行列式不等于零，按照克兰姆公式，可得一个确定的解。只是要注意，这方程組的常数項含有未知数 $x_{k+1},\ \cdots,\ x_n$，这些未知数的值可以任意給定。由克兰姆公式直接得到，方程組(12)的解可写成

$$x_j=\alpha_j+\beta_{k+1}^{(j)}x_{k+1}+\beta_{k+2}^{(j)}x_{k+2}+\cdots+\beta_n^{(j)}x_n$$

$$(j=1,2,\cdots,k)。\qquad (13)$$

其中 α_s 与 $\beta_p^{(q)}$ 是数字系数而 $x_{k+1}, x_{k+2}, \cdots, x_n$ 看成任意的。由上面討論可知，在所有特征行列式全为零的情形下，这些公式給出了方程組（6）的一般解。

定理 II. 如果所有特征行列式全为零，則只需解含有原方程組的主行列式的那些方程，而且对系数組成主行列式的那些未知数来求解。这个解可根据克兰姆公式得到而且可将未知数中的 k 个表成其余 $(n-k)$ 个未知数的綫性函数(13)，这 $(n-k)$ 个未知数的值是完全任意的，其中 k 表示系数矩陣的秩。这样就得方程組（6）的所有的解。

比較定理 I 与 II，卽得：

定理 III. 方程組（6）有解的必要与充分条件是該方程組的所有特征行列式全等于零。

必須注意，当 $k=n$ 时，就是說，当秩等于未知数的个数时，則在公式 (13) 的右端不含有 x_j，因之所有从 x_1 到 x_n 的值完全确定。

定理 IV. 方程組有一解而且只有一解的必要且充分的条件是，所有特征行列式全等于零而且它的系数矩陣的秩等于未知数的个数。

必須注意，所有上面的討論显然在方程的个数等于未知数的个数时也适用，卽 $m=n$ 的情形也适用。

例 考慮具有三个未知数的四个方程所成的方程組。

$$x-3y-2z=-1$$
$$2x+y-4z=3$$
$$x+4y-2z=4$$
$$5x+6y-10z=10。$$

先写出由系数所組成的表：

$$\begin{Vmatrix} 1, & -3, & -2 \\ 2, & 1, & -4 \\ 1, & 4, & -2 \\ 5, & 6, & -10 \end{Vmatrix}。$$

不难驗証，所有含于表中的三阶行列式全等于零，但是位于左上角的二阶行列式不等于零。所以可以把它看作主行列式，于是方程組的秩等于二。作特征行列式。在現在的情形有两个：

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 1, & -3, & -1 \\ 2, & 1, & 3 \\ 1, & 4, & 4 \end{vmatrix}=0, \quad \Delta_4=\begin{vmatrix} 1, & -3, & -1 \\ 2, & 1, & 3 \\ 5, & 6, & 10 \end{vmatrix}=0。$$

这两个都等于零，因此，所給的方程組是相容的，所以由头两个方程解 x 与 y 就行了，此时須把 z 移到右端

$$x-3y=2z-1$$

$$2x+y=4z+3。$$

得到下列形式的解：

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2z-1, & -3 \\ 4z+3, & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1, & -3 \\ 2, & 1 \end{vmatrix}}=2z+\frac{8}{7},$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1, & 2z-1 \\ 2, & 4z+3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1, & -3 \\ 2, & 1 \end{vmatrix}}=\frac{5}{7},$$

其中 z 是任意的。

10．齐次方程組　如果方程組的常数項 b_i 全等于零，則方程組叫做齐次的。如果这种齐次方程組有特征行列式的話，則因最后一列全由零組成，它們全等于零。十分显然，任何齐次方程組有一組解

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=0,$$

以后我們把这組解叫做零解。齐次方程組的基本問題是，它有沒有非零解，而且如果有的話，則所有这种解的集合将是怎样的。首先看方程的个数等于未知数的个数的情形。此时方程組取下列形式：

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1-a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0。\end{array}\right\} \tag{14}$$

如果这个方程組的行列式不等于零，則按照克兰姆定理，这方程組有一个确定的解，而且在这种情形下就是零解。如果方程組的行列式等于零，則由系数組成的表的秩 k 小于未知数的个数，因此，$(n-k)$ 个未知数的值完全可以任意，由此即得到一个非零解的无穷集合，这样我們得到下面这基本定理。

定理 I. 方程組(14)有非零解的必要且充分条件是，它的行列式等于零。

我們比較从非齐次方程組(1)以及从齐次方程組(14)所得到的結果。如果方程組的行列式不等于零，則非齐次方程組(1)有一个确定的解，而齐次方程組只有零解。如果方程組的行列式等于零，則齐次方程組(14)有非零解，但是在这种条件下，一般說来，非齐次方程組未必有解，因为，它有解的必要条件是，它的常数项必須是这样选择的，使得它的所有特征行列式全变成零。对这些結果作一个平行的比較在以后將起重大的作用。在物理学中，当考虑自有振动的問題时就会遇到齐次方程組，而当考虑强迫振动的問題时就会遇到非齐次方程組，上面說到的行列式等于零的情形，对齐次方程組来說它將表征自有振动的存在，而对非齐次方程組来說它將表征共振的現象。

我們現在来詳細研究方程組(14)当它的基本行列式等于零时的解。設 k 为它的系数組成的表的秩，于是显然 $k<n$。根据前小节証明的定理，我們应該取 k 个含有主行列式的方程而且对 k 个未知数来求解。不失去普遍性，可假定这 k 个未知数就是 $x_1,\cdots,x_k$。这样得到的解可写成：

$$x_j=\beta_{k+1}^{(j)}x_{k+1}+\cdots+\beta_n^{(j)}x_n \qquad (j=1, 2, \cdots, k), \qquad (15)$$

其中 $\beta_p^{(q)}$ 是确定的数字系数而 $x_{k+1}, \cdots, x_n$ 可取任意的值。

从方程組(14)的綫性与齐次性，直接得到这个方程組的解的一个一般的性质，这个性质可以叫做解的累加（наложение）原則，那就是，如果我們已有方程組的某些解：

$$x_s=x_s^{(1)};\ x_s=x_s^{(2)};\ x_s=x_s^{(3)};\ \cdots;\ x_s=x_s^{(l)}(s=1, 2, \cdots, n), \quad (16)$$

則把它們分别乘上任意常数，然后加起来，其結果仍然是方程組的解

$$x_s=Cx_s^{(1)}+C_2x_s^{(2)}+C_3x_s^{(3)}+\cdots+C_lx_s^{(l)} \quad (s=1, 2, \cdots, n)。$$

就象我們对于綫性微分方程所做的一样[II, 26]，解(16)叫做綫性无关，如果沒有任何一組不全为零的值 C_i，使得下面等式对于每一个 s 成立：

$$\sum_{i=1}^{l} C_ix_s^{(i)}=0。$$

不难作出这样的 $(n-k)$ 个綫性无关的解，使得由它們乘上任意常数然后加起来，可得到方程組的全部的解。实际上，我們回过去看給出一般解的公式(15)，根据这些公式用下述方法作出 $(n-k)$ 个解：令 $x_{k+1}=1$ 而其余的 x_{k+s} 为零，卽得第一解；令 $x_{k+2}=1$ 而其余的 x_{k+s} 为零，卽得第二解，如此作下去，最后令 $x_n=1$ 而其余的 x_{k+s} 为零，卽得第 $(n-k)$ 个解。不难看出，这样作出来的解是綫性无关的，因为其中每一解总是在某一未知数上取1的值而其余的解則在这同一未知数上皆取零的值。将得到的解記成下面的形式：

$$x_s=x_s^{(k+1)};\ x_s=x_s^{(k+2)};\cdots;\ x_s=x_s^{(n)} \quad (s=1, 2, \cdots, n)。$$

現在取方程組(14)的任何一解。它可以从公式(15)当 $x_{k+1}, \cdots, x_n$ 取某一組值而得到：

$$x_{k+1}=\gamma_{k+1};\ x_{k+2}=\gamma_{k+2};\cdots;\ x_n=\gamma_n。$$

显然，这个解是上面作出的$(n-k)$个解的綫性組合，就是説

$$x_s=\gamma_{k+1}x_s^{(k+1)}+\gamma_{k+2}x_s^{(k+2)}+\cdots+\gamma_n x_s^{(n)} \quad (s=1,\ 2,\ \cdots,\ n)。$$

我們再回头来研究齐次方程組(14)的解，而且指出，不管你怎样选取綫性无关解，它們的最大个数恒等于$(n-k)$。

現在来看n个未知数的m个方程的一般情形，如果$m<n$，則秩k由于它不超过m，必定小于n，因而有$(n-k)$个未知数可以是任意的。就是説，如果齐次方程的个数小于未知数的个数，則方程組有非零解。

一般地$k\leqslant n$，并且当$k=n$时，方程組只有零解。

11. 綫性型 求解綫性方程組的問題与綫性型組的討論有密切的关系。所謂n个变数$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$的綫性型就是指这些变数的綫性齐次函数。假設有m个这样的綫性型

$$y_s=a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n \quad (s=1,\ 2,\ \cdots,\ m)。\tag{17}$$

如果有m个常数$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m$存在，它們不全是零，使得下面的关于变数$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m$的恒等式成立：

$$\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2+\cdots+\alpha_m y_m=0,$$

則这些綫性型叫做綫性相关。反之，如果这样的常数不存在，則綫性型(17)叫做綫性无关。在上述恒等式中所有变数x_l的系数应全为零。因此，上述恒等式实际上与下面的n个等式作成的組等价：

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 a_{11}+\alpha_2 a_{21}+\cdots+\alpha_m a_{m1}=0\\
&\alpha_1 a_{12}+\alpha_2 a_{22}+\cdots+\alpha_m a_{m2}=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\alpha_1 a_{1n}+\alpha_2 a_{2n}+\cdots+\alpha_m a_{mn}=0。
\end{aligned}$$

当而且只有当这个关于$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m$的齐次方程組只有零解的时候，綫性型$y_s$才是綫性无关的。由上面得到的結果可以得出关于綫性型的綫性相关性的一串推論。如果$m>n$，則上述齐次方程組一定有非零解，因此，綫性型是綫性相关的。为了使綫性型是

无关的必要且充分的条件就是，由系数 a_{pq} 作成的表的秩等于綫性型的个数 m。如果 $m=n$，就是説，如果綫性型的个数等于变数的个数，則它們綫性无关的必要且充分的条件是，由系数 a_{pq} 作成的正方 $(m=n)$ 表的行列式不等于零。在这种情形我們就說，我們有一个綫性无关的綫性型的完全組。如果 $m\leqslant n$ 而且綫性型(17)是綫性无关的(就是 $k=m$)，則对于 y_s 的任意值，方程組(17)对那些系数恰好作成一个不等于零的 k 阶行列式的变数是可解的，那就是說，綫性无关的型可以取 y_s 的值的任何一个集合。如果 $k=m=$ $=n$，則所有变数 x_l 的值可由給定的 y_s 的值决定。

現在假定 $k<m$，只要把型 y_s 及变数 x_l 的号碼适当改换一下，就可使在表 a_{pq} 中位于左上角的 k 阶行列式不等于零。此时，头 k 个型 $y_1, y_2, \cdots, y_k$ 是綫性无关的，而其余的每一个型 y_{k+1} 皆可用头 k 个型綫性地表出。实际上，由于头 k 个型的系数作成的表的秩为 k，因此它等于型的个数，所以这些型是綫性无关的。如果取定 $(k+1)$ 个型 $y_1, y_2, \cdots, y_k, y_{k+1}$，則它們的系数所作成的表的秩仍然等于 k，因而小于型的个数，就是說，这些型是綫性相关的。也就是說，有不全为零的常数 β_s 存在，使得

$$\beta_1 y_1+\cdots+\beta_k y_k+\beta_{k+1} y_{k+1}=0。$$

在这个关系中系数 β_{k+1} 必定不等于零，因为前 k 个型 $y_1, y_2, \cdots, y_k$ 原来就是綫性无关的。由是我們得到把 y_{k+1} 表成头 k 个型的綫性表达式：

$$y_{k+1}=-\frac{\beta_1}{\beta_{k+1}} y_1-\frac{\beta_2}{\beta_{k+1}} y_3-\cdots-\frac{\beta_k}{\beta_{k+1}} y_k。$$

数 k 叫做綫性型組(17)的秩。这个数等于系数表的秩，另一方面，它又等于綫性型組(17)的綫性无关型的数目的最大数。

假定我們有 k 个綫性无关型 $y_1, y_2, \cdots, y_k$ 而 $k<n$。可以认为位于表 a_{pq} 的左上角的 k 阶行列式不等于零。不难看出，可以把

这 k 个型补充成 n 个綫性无关型的完全組。实际上，只要假設：

$$y_{k+1}=x_{k+1};\ \cdots,\ y_n=x_n。$$

这样得到的 n 个型的行列式是：

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1k}, & a_{1,k+1}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2k}, & a_{2,k+1}, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1}, & a_{k2}, & \cdots, & a_{kk}, & a_{k,k+1}, & \cdots, & a_{kn} \\ 0, & 0, & \cdots, 0, & & 1, & 0, \cdots, & 0 \\ 0, & 0, & \cdots, 0, & & 0, & 1, \cdots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & \cdots, 0, & & 0, & 0, \cdots, & 1 \end{vmatrix}。$$

首先按最后一行展开，然后按倒数第二行展开，如此类推，我們看出，此行列式的值等于它的右上角的 k 阶行列式，就是說，它不等于零。因此，型 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 确实是綫性无关的。这样，任何的綫性无关型組恒可补充成綫性无关的完全的綫性型組。

12. n 維矢量空間 让我們来对上面得到的結果給一个几何的說法，这种說法以后会用到的。为了这个目的我們引入 n 維空間中的矢量概念，那就是，把在一定次序下的 n 个数（复数）的集合叫做矢量。因此，每个矢量 $\boldsymbol{x}$ 由 n 个复数所作成的序列来决定，而其中每个复数叫做这个矢量的一个分量：$\boldsymbol{x}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。所有这样的矢量的集合組成 n 維矢量空間 R_n。

两个矢量在而且只有在它們的相当分量都相等时才认为相等。就是說，如果有两个矢量 $\boldsymbol{u}(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 与 $\boldsymbol{v}(v_1, v_2, \cdots, v_n)$，則矢量等式 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}$ 与数量等式 $u_1=v_1,\ u_2=v_2,\ \cdots,\ u_n=v_n$ 是等价的。我們来定义矢量的运算，——矢量与数的乘法以及矢量的加法。矢量与一个数的乘法定义为这个矢量的所有分量与这个数的乘法，就是說，如果矢量 $\boldsymbol{x}$ 具有分量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，則矢量 $k\boldsymbol{x}$ 就有分量 $(kx_1, kx_2, \cdots, kx_n)$。矢量的加法定义为分量的相加，就是

說，如果有两个矢量 $\boldsymbol{x}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 与 $\boldsymbol{y}(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，則，按定义，和 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ 具有分量 $(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n)$。分量全等于零的矢量 $(0, 0, \cdots, 0)$ 叫做零矢量。用 θ 来表这个矢量。显然，对于任意矢量 $\boldsymbol{x}$ 我們有 $\theta=0\boldsymbol{x}$ 以及 $\boldsymbol{x}+\theta=\boldsymbol{x}$。矢量的减法定义为：矢量 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ 具有分量 $(x_1-y_1, x_2-y_2, \cdots, x_n-y_n)$。显然有 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}=\theta$ 与 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}+(-1)\boldsymbol{y}$，就是說，减去矢量 $\boldsymbol{y}$ 相当于加上一个用 (-1) 乘 $\boldsymbol{y}$ 而得到的矢量。以后我們常常有必要写矢量等式。每个这样的等式相当于 n 个数量等式，这 n 个数量等式表示矢量等式两端的对应分量相等。以后我們不用 θ 这个記号来表示零矢量，但是必須記得，如果在矢量等式的一端是零的話，則这个零应該看作零矢量。从上述定义直接得到加法与乘法的一些普通的性质：

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z};$$

$$(k_1+k_2)\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{x}+k_2\boldsymbol{x};\quad k(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=k\boldsymbol{x}+k\boldsymbol{y};$$

$$k_1(k_2\boldsymbol{x})=(k_1k_2)\boldsymbol{x}。$$

因此，在一个任意多項的和中我們可以变換項的次序而且也可以用括弧把項分成一些群。从等式 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{z}$ 得到 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}$ 与 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}$；反之，从 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=\boldsymbol{z}$ 得到 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}$。

現在引进矢量的綫性相关与綫性无关的概念。矢量

$$\boldsymbol{x}^{(1)},\ \boldsymbol{x}^{(2)},\ \cdots,\ \boldsymbol{x}^{(l)} \tag{18}$$

叫做綫性相关，如果有这样的不全为零的常数 $C_1, C_2, \cdots, C_l$ 存在，使得

$$C_1\boldsymbol{x}^{(1)}+C_2\boldsymbol{x}^{(2)}+\cdots+C_l\boldsymbol{x}^{(l)}=0。 \tag{19}$$

如果这样的常数不存在，則矢量(18)叫做綫性无关。用 $(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \cdots, x_n^{(j)})$ 表示矢量 $\boldsymbol{x}^{(j)}$ 的分量。条件(19)显然相当于未知数 $C_1, C_2, \cdots, C_l$ 的 n 个方程所作成的方程組：

$$\left.\begin{array}{l}x_1^{(1)}C_1+x_1^{(2)}C_2+\cdots+x_1^{(l)}C_l=0\\x_2^{(1)}C_1+x_2^{(2)}C_2+\cdots+x_2^{(l)}C_l=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\x_n^{(1)}C_1+x_n^{(2)}C_2+\cdots+x_n^{(l)}C_l=0。\end{array}\right\}\qquad(20)$$

利用前面得到的关于齐次方程組的結果，不難得出一串的推論，而且反轉来用这些推論給那些結果一个几何的解釋。首先假定 $l>n$，就是說，假定矢量的个数大于空間的維数。此时，在齐次方程組(20)中方程的个数小于未知数的个数，因此，方程組对于未知数 C_j 来讲一定有非零解，就是說，我們的矢量一定是綫性相关的，換句話說，綫性无关的矢量的个数至多等于空間的維数。現在来考虑 $l=n$ 的情形。此时，方程組(20)含有相同个数的方程和未知数，因此，在而且只有在它的行列式等于零的时候，方程組才有非零解，就是說，在 n 維空間內如果有 n 个矢量而且把这些矢量的 n^2 个分量作成一个行列式，作的方法是，把每个矢量的分量放在一定的列里而且使分量的号碼与行的号碼一致，則矢量綫性无关的必要且充分的条件是这个行列式不等于零。这个行列式的值类似于在实的三維空間中平行六面体的体积。

我們可以把任意一个 n 阶行列式 $|b_{ik}|$ 的每列的元素 $(b_{1k}, b_{2k}, \cdots, b_{nk})$ 看作某一个矢量 $\boldsymbol{b}^{(k)}$ 的分量，这样，行列式的值便是 n 个矢量 $\boldsymbol{b}^{(1)}, \boldsymbol{b}^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{b}^{(n)}$ 的函数。这个行列式等于零与这些矢量是綫性相关的事实是一回事。

当把行列式的值当作矢量 $\boldsymbol{b}^{(k)}$ 的函数看时，我們把它記作

$$|b_{ik}|=\Delta(\boldsymbol{b}^{(1)}, \boldsymbol{b}^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{b}^{(n)})。$$

如果我們回忆起，当两列对换时，行列式的值改号，我們因此可以断定，如果对换两个元的位置，則函数 Δ 仅仅改号。这样的函数通常叫做反对称函数，例如，不难看出在[5]中考察过的范德蒙行列式 D_n 就是元 $x_1, \cdots, x_n$ 的一个反对称函数。

现在回过来看方程組(20)而且考察在 $l\leqslant n$ 的假定下矢量 $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(l)}$ 的綫性无关的問題。用 k 表示由分量 $x_p^{(q)}$ 組成的表的秩。如果 $k=l$，則方程組仅有零解，就是說，矢量是綫性无关的。如果 $k<l$，則方程組一定有非零解，就是說，矢量綫性无关的必要且充分的条件是，矢量的个数等于由它們的分量所組成的表的秩。現在假定 $k<l$，就是說，矢量綫性相关。从这些矢量中抽出这样 k 个矢量（这是可以用一些方法办到的），使得它們的分量組成的表含有一个不等于零的 k 阶行列式。根据上面的証明，这些矢量是綫性无关的。不难看出，其余的每个矢量都可以表成这些矢量的綫性組合。实际上，設 $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(k)}$ 为綫性无关的矢量。再添加任何一个其他的矢量 $x^{(k+s)}$，就得到 $(k+1)$ 个綫性相关的矢量，这是因为由分量組成的表的秩 k 小于矢量的个数 $l=k+1$。于是，就有不全为零的常数 $C_i\ (i=1, 2, \cdots, k, k+s)$ 存在，使得

$$C_1x^{(1)}+C_2x^{(2)}+\cdots+C_kx^{(k)}+C_{k+s}x^{(k+s)}=0。$$

此时，一定 $C_{k+s}\neq 0$，因为，否則矢量 $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(k)}$ 将变成綫性相关的了。从上述等式得到

$$x^{(k+s)}=-\frac{C_1}{C_{k+s}}x^{(1)}-\frac{C_2}{C_{k+s}}x^{(2)}-\cdots-\frac{C_k}{C_{k+s}}x^{(k)},$$

就是說，$x^{(k+s)}$ 可表成 $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(k)}$ 的綫性組合。設 $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(n)}$ 为任何 n 个綫性无关的矢量。作为这样的矢量的例，我們可以提出下列 n 个矢量：

$$(1, 0, \cdots, 0);(0, 1, 0, \cdots, 0);\cdots;(0, 0, 0, \cdots, 1)。\quad(21)$$

如果我們随便取一个矢量 x，則这 $(n+1)$ 个矢量 $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(n)}, x$，与上面我們所知道的一样，一定綫性相关：

$$C_1x^{(1)}+C_2x^{(2)}+\cdots+C_nx^{(n)}+Cx=0,$$

而且常数 C 一定不等于零，因为，否則矢量 $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(n)}$ 将

变成相关的了。由是推得，任意一个矢量 x 可用 n 个綫性无关的矢量表示出来：

$$x=\alpha_1 x^{(1)}+\alpha_2 x^{(2)}+\cdots+\alpha_n x^{(n)} \quad \left(\alpha_s=-\frac{C_s}{C}\right)。 \tag{22}$$

不难看出，x 用 $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(n)}$ 所表达的表达式是唯一的，实际上，如果除了上面的表达式以外还存在另外的表达式：

$$x=\beta_1 x^{(1)}+\beta_2 x^{(2)}+\cdots+\beta_n x^{(n)},$$

其中有某一个系数 β_s 与对应的 α_s 不同，于是，只要将 x 的这两个表达式逐項相减，我們卽得：

$$(\alpha_1-\beta_1)x^{(1)}+(\alpha_2-\beta_2)x^{(2)}+\cdots+(\alpha_n-\beta_n)x^{(n)}=0,$$

这就是說，矢量 $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(n)}$ 将变成綫性相关的了。如果将矢量(21)取作矢量 $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(n)}$，于是公式(22)中的系数 α_s 显然与矢量 $x(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的分量 x_s 全同。在一般情形下，只要把 $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(n)}$ 取作基本单位矢量，系数 α_s 也可以叫做矢量 x 的分量。如令数 α_s 取所有可能的复数，我們就得到 n 維空間所有的矢量。現在假設有 k 个綫性无关的矢量

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(k)}, \tag{23}$$

这里 $k<n$。令 C_s 表示任意常数，由公式

$$y=C_1 x^{(1)}+C_2 x^{(2)}+\cdots+C_k x^{(k)}, \tag{23$_1$}$$

所得出的矢量集合叫做一个 k 維子空間 L_k。和上面一样，可以証明，属于 L_k 的每一个矢量都可以用 $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(k)}$ 唯一地表达出来。換句話說，矢量(23)生成子空間 L_k。

我們注意，如果某一个矢量 z 属于 L_k，就是說，它可表成形式 (23_1)，則对于任意常数 c 矢量 cz 同样也可表成形式 (23_1)，卽同样属于 L_k。同理，如果 $z^{(1)}$ 与 $z^{(2)}$ 属于 L_k，則它們的和 $z^{(1)}+z^{(2)}$ 也属于 L_k。从此可以直接推出更普遍的性質：如果某些矢量 $z^{(1)}$, $z^{(2)}, \cdots, z^{(p)}$ 属于 L_k，則它們的任意一个綫性組合 $\gamma_1 z^{(1)}+\gamma_2 z^{(2)}+$

$+\cdots+\gamma_p z^{(p)}$ 仍然属于 L_k。

設在 L_k 中随便取 m 个矢量：

$$y^{(s)}=C_1^{(s)}x^{(1)}+C_2^{(s)}x^{(2)}+\cdots+C_k^{(s)}x^{(k)}$$

$$(s=1,\ 2,\ \cdots,\ m)。\qquad (24)$$

由于矢量(23)的綫性无关性，下列关系

$$\alpha_1 y^{(1)}+\alpha_2 y^{(2)}+\cdots+\alpha_m y^{(m)}=0$$

就相当于 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m$ 的 k 个齐次方程所成的方程組：

$$\alpha_1 C_q^{(1)}+\alpha_2 C_q^{(2)}+\cdots+\alpha_m C_q^{(m)}=0\quad (q=1,\ 2,\ \cdots,\ k)。$$

如果这方程組有非零解，則矢量(24)是綫性相关的。特别，如果 $m>k$，則它一定有非零解，这就是說，在由矢量(23)生成的子空間內的任何一个矢量集合，如果它包含多于 k 个的矢量，則它是一个綫性相关的矢量集合。从此直接推出，一个子空間，如果它是由綫性无关的矢量(23)所生成的，則它不可能由个数比 k 少的 l 个綫性无关的矢量 $z^{(1)},\cdots,z^{(l)}$ 生成。实际上，假如它可由 $z^{(1)},\ \cdots,\ z^{(l)}$ 生成。按剛才的結論，一方面，在这子空間中不能有多于 l 个的綫性无关的矢量存在，而另一方面又有数目多于 l 的 k 个綫性无关的矢量(23)属于它。如果我們取任何 k 个属于 L_k 的綫性无关的矢量 $u^{(1)},\ u^{(2)},\ \cdots,\ u^{(k)}$，則按上述的意义它們生成同一个子空間 L_k。

实际上，按照子空間的定义，每一个綫性組合

$$C_1 u^{(1)}+C_2 u^{(2)}+\cdots+C_k u^{(k)}$$

属于 L_k，另一方面，在 L_k 中任取一矢量 y。由于矢量 $u^{(1)},\ \cdots,u^{(k)}$ 与 y 都属于 L_k，它們必是綫性相关的

$$\beta_1 u^{(1)}+\beta_2 u^{(2)}+\cdots+\beta_k u^{(k)}+\gamma y=0,$$

因为 $u^{(1)},\ \cdots,\ u^{(k)}$，是綫性无关的，系数 γ 必須不等于零，就是說，L_k 内每个矢量 y 恒可用 $u^{(1)},\cdots,u^{(k)}$ 表示，也就是，矢量 $u^{(1)},\ \cdots,$ $u^{(k)}$ 确实生成 L_k。如果在公式 (24) 中 $m=k$ 而且系数 $C_p^{(q)}$ 作

成的行列式不等于零，则 $y^{(1)},\cdots,y^{(k)}$ 是 L_k 中的綫性无关的矢量。在一般情形下不难証明，由公式(24)給出的綫性无关的矢量的数目等于表 $C_p^{(q)}$ 的秩。

在前面我們看到，如果矢量 z 属于某一个子空間 L，則对于任意常数 c，矢量 cz 也属于 L，并且，如果 $z^{(1)}$ 与 $z^{(2)}$ 属于 L，则 $(z^{(1)}+z^{(2)})$ 也属于 L。我們有可能給子空間以新的定义。如果一个矢量集合 L 具有下述的性质：若 z 属于 L，則 cz 也属于 L，而且若 $z^{(1)}$ 与 $z^{(2)}$ 属于 L，則 $(z^{(1)}+z^{(2)})$ 也属于 L，于是矢量集合 L 叫做一个子空間。由此直接推出，属于 L 的矢量的每个綫性組合仍属于 L。剛才我們看到，用以构成子空間的新定义的那些性质是作为推論从原来的定义推出来的。現在来証明它的反面，从新定义也可以推出原来的定义，就是說，这两个定义是等价的。

在 L 中任取一个矢量 $x^{(1)}$，按 L 的定义，对于任意常数 C_1，矢量 $C_1x^{(1)}$ 仍属于 L。如果所有 $C_1x^{(1)}$ 已經取尽了 L 的全部矢量，則我們得到在原来意义下的子空間 L_1。如若不然，L 一定含有某一个与 $x^{(1)}$ 綫性无关的矢量 $x^{(2)}$ 对于任意的 C_1 与 C_2，矢量 $C_1x^{(1)}+$ $+C_2x^{(2)}$ 属于 L。如果所有矢量 $C_1x^{(1)}+C_2x^{(2)}$ 取尽了 L 的全部矢量，則在原来的意义下 L 就是某一个 L_2。如若不然，L 一定含有某一个矢量 $x^{(3)}$，使得 $x^{(1)}$，$x^{(2)}$，$x^{(3)}$，綫性无关。如此继續下去，在加进有限多个綫性无关的矢量 $x^{(s)}$ 以后，我們即可取完 L 的全部矢量，因为多于 n 个的綫性无关的矢量是不存在的。这些矢量 $x^{(s)}$ 的总数 k 表示子空間 L 的維数。如果 $k=n$，則 L 与整个的 n 維空間重合。

我們提出一个与子空間的构成有关的情形。假設矢量 $x^{(1)}$，$x^{(2)}$，$\cdots$，$x^{(k)}$ 綫性相关。此时我們仍然說，公式(23_1)定义某一个子空間 L。假設在这些矢量中前 l 个 $x^{(1)}$，$x^{(2)}$，$\cdots$，$x^{(l)}$ 綫性无关而其余每一个矢量 $x^{(l+1)}$，$\cdots$，$x^{(k)}$ 可写成前面 l 个矢量的綫性組

合。此时由公式(23_1)定义的矢量集合显然与由下面的公式定义的矢量集合全同:

$$\boldsymbol{y}=C_1\boldsymbol{x}^{(1)}+C_2\boldsymbol{x}^{(2)}+\cdots+C_l\boldsymbol{x}^{(l)}.$$

这就是說，由綫性相关的矢量$\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{x}^{(k)}$所生成的子空間具有維数$l(l<k)$。

我們来考察实的三維空間而且規定所有矢量都是从某一固定的点O(原点)出发的。在现在的情形$n=3$。当$k=1$时，子空間L_1是通过原点O的某一直綫，而L_2是通过原点O的某一平面。

13. 数量积 先規定一种記法。如果α是某一个复数，我們用$\bar{\alpha}$表示与α共軛的复数并且用$|\alpha|$表示α的模，卽有$\alpha\bar{\alpha}=|\alpha|^2$。如果$\alpha$是实的，則$\bar{\alpha}=\alpha$并且$|\alpha|^2=\alpha^2$。現在引进一个新的，对以后很重要的概念。

定义 两个矢量

$$\boldsymbol{x}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \text{ 与 } \boldsymbol{y}(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

的数量积的定义为下列的和数:

$$\sum_{s=1}^{n} x_s\bar{y}_s.$$

我們以后用記号$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$表示数量积。卽有

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=\sum_{s=1}^{n} x_s\bar{y}_s;\quad (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})=\sum_{s=1}^{n} y_s\bar{x}_s.$$

由是得到
$$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})=\overline{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}.$$

如果两个矢量的数量积等于零，則它們叫做互相垂直或互相正交。因为零的共軛复数仍然是零，在正交的情况下数量积中矢量的次序是无关紧要的。不难看出，零矢量与任何一个矢量正交。

从数量积的定义直接得到它的如下的性质:

$$(\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=\alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y});\quad (\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y})=\bar{\alpha}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),$$

其中α是一个数量因子。此外还有:

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})+(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z});\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})+(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}),$$

并且这个分配律对于任意多项的和仍然成立。从它顺便可以得到：

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})+(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})+(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u})+(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{v})。$$

作矢量 $\boldsymbol{x}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 与它自身的数量积：

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})=\sum_{s=1}^{n} x_s\bar{x}_s=\sum_{s=1}^{n}|x_s|^2。$$

如此我們得到一个实数，这个实数，当矢量 $\boldsymbol{x}$ 不等于零矢量 $(0, 0, \cdots, 0)$ 时是正的。当 $\boldsymbol{x}$ 为零矢量时等于零。实数 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ 的平方根（正値）叫做矢量 $\boldsymbol{x}$ 的模或它的长。用 $\|\boldsymbol{x}\|$ 表这个模，它可以写成：

$$\|\boldsymbol{x}\|^2=(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})=\sum_{s=1}^{n}|x_s|^2; \quad \|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}=\sqrt{\sum_{s=1}^{n}|x_s|^2}。$$

等式 $\|\boldsymbol{x}\|=0$ 即相当于 $\boldsymbol{x}$ 是零矢量。假設有三个正交的矢量 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, 与 $\boldsymbol{z}$。即

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=0; \ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})=0; \ (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})=0。$$

如果应用数量积的分配律并且注意上述等式，我們即得：

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})+(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})+(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z})$$

或
$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}\|^2=\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2+\|\boldsymbol{z}\|^2。$$

这个公式表达了商高定理或毕达哥拉斯定理。它对于任意多项仍然成立。成立的理由主要在于这些矢量两两正交。我們来証明，如果矢量 $\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{x}^{(l)}$ 两两正交而且每一个都不是零矢量，則它們是綫性无关的。实际上，假設

$$\sum_{s=1}^{l} C_s\boldsymbol{x}^{(s)}=0,$$

我們来証明，所有 C_s 皆等于零。按数量积的乘法，用 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 乘上面等式的两端，其中 k 取数 $1, 2, \cdots, l$ 中的任何一数，即得：

$$\sum_{s=1}^{l} C_s(\boldsymbol{x}^{(s)}, \boldsymbol{x}^{(k)})=0。$$

由于矢量 $\boldsymbol{x}^{(s)}$ 两两正交，当 $s\neq k$ 时 $(\boldsymbol{x}^{(s)}, \boldsymbol{x}^{(k)})=0$，于是上面等式化成 $C_k(\boldsymbol{x}^{(k)}, \boldsymbol{x}^{(k)})=0$，即 $C_k\|\boldsymbol{x}^{(k)}\|^2=0$，由于 $\|\boldsymbol{x}^{(k)}\|^2>0$，由是推得 $C_k=0$，而且这对于任一 k 皆成立。

14. 齐次方程組的几何解釋 让我們来考察齐次方程組

$$\left.\begin{array}{l}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0。\end{array}\right\}\tag{25}$$

引进矢量:

$$\boldsymbol{a}^{(1)}(\bar{a}_{11}, \bar{a}_{12}, \cdots, \bar{a}_{1n});\ \cdots,\ \boldsymbol{a}^{(n)}(\bar{a}_{n1}, \bar{a}_{n2}, \cdots, \bar{a}_{nn})。\tag{26}$$

此时方程組(25)可以写成下面这种簡短的形式:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}^{(1)})=0;\ \cdots;\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}^{(n)})=0,\tag{27}$$

这就是說，問題归結到寻找与所有矢量 $\boldsymbol{a}^{(j)}$ 垂直的那些矢量 $\boldsymbol{x}$。如果行列式 $|a_{ik}|$ 不等于零，則在数值上与它共軛的行列式 $|\bar{a}_{ik}|$ 也不等于零。在这种情形矢量 $\boldsymbol{a}^{(j)}$ 綫性无关，因之方程組 (27) 只有零解，就是說，同时与 n 个綫性无关的矢量垂直(在 n 維空間内)的矢量(除零矢量外)是不存在的。

现在来考察其他的情形，即方程組 (25) 的行列式等于零的情形。假設方程組的秩等于 k。如果作出由系数的共軛数組成的表，則含于其内的行列式就值来說是与含于表 $\|a_{ik}\|$ 内的相当的行列式共軛的。因而共軛表的秩仍然是 k，因此，按前面的証明，在矢量 $\boldsymbol{a}^{(j)}$ 中有 k 个綫性无关的矢量，而其余的每一个矢量是它們的綫性組合。不失普遍性，可設这 k 个綫性无关矢量为

$$\boldsymbol{a}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{a}^{(k)},\tag{28}$$

而对于其余每一个矢量我們有表达式

$$\boldsymbol{a}^{(k+s)}=\beta_1^{(k+s)}\boldsymbol{a}^{(1)}+\cdots+\beta_k^{(k+s)}\boldsymbol{a}^{(k)}$$

$$(k+s=k+1, k+2, \cdots, n),$$

其中 $\beta_p^{(q)}$ 为数字系数。从上面的关系直接可以推出，如果 x 垂直于矢量(28)，則它同时也垂直于所有的矢量 $a^{(i)}$。实际上

$$(x,\ a^{(k+s)})=(x,\ \sum\beta_i^{(k+s)}a^{(i)})=\sum\overline{\beta}_i^{(k+s)}(x,\ a^{(i)})$$

而且所有的和等于零，因为等式右端的和数中每一項都是零。这样一来，只需解头 k 个方程作成的方程組就够了，如通常一样可設不等于零的 k 阶行列式位于左上角，对于待求的矢量 x 我們应用在[12]中叙述的方法得到 $(n-k)$ 个綫性无关的解 $x^{(1)},\cdots,x^{(n-k)}$，而任一个解皆可表成这 $(n-k)$ 个矢量的綫性組合。在現在的情形，由公式

$$y=C_1a^{(1)}+\cdots+C_ka^{(k)},$$

其中 C_i 为任意常数，所确定的全部矢量組成一 k 維空間 L_k，它是整个 n 維空間的一个子空間。完全一样，求得的矢量 $x^{(1)},\cdots,x^{(n-k)}$ 生成一 $(n-k)$ 維子空間 M_{n-k}。子空間 M_{n-k} 与 L_k 在下述的意义下互相垂直，即 M_{n-k} 中每一个矢量垂直于 L_k 中每一个矢量（反之也如此），子空間 M_{n-k} 是由所有滿足方程(27)的矢量作成的，也就是，它由所有垂直于矢量 $a^{(1)},\cdots,a^{(k)}$ 的矢量作成的。不难看出，这 n 个矢量 $a^{(1)},\cdots,a^{(k)},x^{(1)},\cdots,x^{(n-k)}$ 綫性无关。实际上，假設它們之間存有一个关系

$$(C_1a^{(1)}+\cdots+C_ka^{(k)})+(d_1x^{(1)}+\cdots+d_{n-k}x^{(n-k)})=0。\tag{29}$$

头一个括弧給出 L_k 中某一个矢量 a，而第二个括弧給出 M_{n-k} 中某一个矢量 x，遂有 $a+x=0$，或 $a=-x$。但是矢量 a 与 x 互相正交，由是可知，矢量 a 与它自身垂直，换句話說，$(a,\ a)=0$ 或 $\|a\|=0$，由此推得，矢量 a 是一个零矢量；同样可知 x 也是一个零矢量，于是

$$C_1a^{(1)}+\cdots+C_ka^{(k)}=0,\ d_1x^{(1)}+\cdots+d_{n-k}x^{(n-k)}=0。$$

但是矢量 $a^{(1)},\cdots,a^{(k)}$ 按假設是綫性无关的，因此，所有常数 C_s 必須等于零；同理，所有常数 d_s 也必須等于零。这样一来，在关系

(29)中所有系数都必須等于零，就是說，矢量 $\boldsymbol{a}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{a}^{(k)}, \boldsymbol{x}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{x}^{(n-k)}$ 确是綫性无关的。

每一个矢量 $\boldsymbol{x}$ 可唯一地表成下面的形式：

$$\boldsymbol{x}=(\gamma_1 \boldsymbol{a}^{(1)}+\cdots+\gamma_k \boldsymbol{a}^{(k)})+(\delta_1 \boldsymbol{x}^{(1)}+\cdots+\delta_{n-k} \boldsymbol{x}^{(n-k)}),$$

而且头一个括弧中的矢量属于 L_k 而第二个属于 M_{n-k}。包含在 M_{n-k} 中的矢量是方程組(27)的所有可能的解，因此，对于任何的綫性无关解的完全組，它的矢量的数目总是 $(n-k)$，卽是 M_{n-k} 的維数。总結上面对齐次方程組的研究，使我們得到下述重要的結果：

如果有一个 k 維的子空間 $L_k (k<n)$，則与这个子空間正交的所有矢量組成一个 $(n-k)$ 維的子空間 M_{n-k}，而且 R_n 中每个矢量 $\boldsymbol{x}$ 都可表成 L_k 中某一矢量 $\boldsymbol{y}$ 与 M_{n-k} 中某一个矢量 $\boldsymbol{z}$ 的和：$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}$。

我們来証明，这样的表示法是唯一的。假定除上述表示法外还有一种：$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$，其中 $\boldsymbol{u}$ 属于 L_k 而 $\boldsymbol{v}$ 属于 M_{n-k}。需要証明，$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{y}$ 与 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{z}$。我們有 $\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$，从而 $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{z}$。差 $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{u}$ 属于 L_k 而差 $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{z}$ 属于 M_{n-k}，由此推出，矢量 $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{u}$ 与它自身正交，卽 $(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}-\boldsymbol{u})=0$ 或 $\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{u}\|=0$，从而 $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{u}=0$，卽 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{u}$。此时从 $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{z}$ 推出 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{z}$。表示法 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}$ 中的矢量 $\boldsymbol{y}$ 叫做矢量 $\boldsymbol{x}$ 在空間 L_k 内的投影。在上述表示法中矢量 $\boldsymbol{y}$ 与 $\boldsymbol{z}$ 互相正交。按照商高定理有 $\|\boldsymbol{x}\|^2=\|\boldsymbol{y}\|^2+\|\boldsymbol{z}\|^2$，从而推出 $\|\boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|$，而且等号在而且只有在 $\boldsymbol{z}$ 为零矢量时才能成立，就是說，等号在而且只有在 $\boldsymbol{x}$ 属于 L_k 时才能成立；此时有 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$。同理，$\|\boldsymbol{z}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|$，而且等号只有在 $\boldsymbol{x}$ 与 L_k 正交的时候，卽 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}$ 的时候才能成立。子空間 L_k 与 M_{n-k} 通常叫做互余正交子空間。如果 $k=n$，則 L_n 是整个 R_n 而 M_0 变成了一个零矢量。

假設我們有一个以前讲过的实的三維空間，且令 $k=2$，于是

$n-k=3-2=1$。子空間 L_2 是某一个过原点 O 的平面 P，而 M_1 是过原点 O 且垂直于 P 的直綫 K。每一个矢量可以唯一地表成两个矢量的和，其一位于平面 P 上而另一位于直綫 K 上。在方程的个数等于未知数的个数这一情形下，对于齐次方程組的解我們已給予几何的解释。对于一般的情形，我們可以完全一样地来討論。在这种情形下，矢量 $\boldsymbol{a}^{(s)}$ 的个数不必等于 n。这个附注对于下一小节也适合。

15. 非齐次方程組的情形　让我們来考虑非齐次方程組：

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n。\end{array}\right\} \tag{30}$$

它可以解释为寻求适合方程組

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{a}^{(1)})=b_1,\ \cdots,\ (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{a}^{(n)})=b_n \tag{31}$$

的矢量 $\boldsymbol{x}(x_1,\ \cdots,\ x_n)$ 的問題，而 $\boldsymbol{a}^{(1)},\ \cdots,\ \boldsymbol{a}^{(n)}$ 为已知矢量(26)。

如果方程組的行列式不等于零，則应用克兰姆法則即可得到一确定的解。假設方程組的行列式等于零而它的系数作成的表的秩等于 k，并且假設位于左上角的 k 阶行列式不等于零。与方程組(30)一道，我們写出一个齐次方程組，它的系数是将原来方程組的系数的行列互换，然后将所有系数代以它的共軛复数而得来的。如此得到的方程組具有形式：

$$\left.\begin{array}{l} \bar{a}_{11}y_1+\bar{a}_{21}y_2+\cdots+\bar{a}_{n1}y_n=0 \\ \bar{a}_{12}y_1+\bar{a}_{22}y_2+\cdots+\bar{a}_{n2}y_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \bar{a}_{1n}y_1+\bar{a}_{2n}y_2+\cdots+\bar{a}_{nn}y_n=0。\end{array}\right\} \tag{32}$$

它的系数表的秩仍然是 k 而且位于左上角的 k 阶行列式仍然不等于零。这齐次方程組叫做与方程組(30)相关联的齐次方程

組。以前讲过，它的一般解是$(n-k)$个解(矢量)的綫性組合，而这$(n-k)$个解，譬如說，可以从头k个方程按照克兰姆定理对$y_1, \cdots, y_k$求解而得到，解的时候可令其余的y_{k+s}等于零，而只有一个等于1。当令$y_{k+1}=1$时我們卽得方程組：

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{11}y_1+\bar{a}_{21}y_2+\cdots+\bar{a}_{k1}y_k&=-\bar{a}_{k+1,1}\\
\bar{a}_{12}y_1+\bar{a}_{22}y_2+\cdots+\bar{a}_{k2}y_k&=-\bar{a}_{k+1,2}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\bar{a}_{1k}y_1+\bar{a}_{2k}y_2+\cdots+\bar{a}_{kk}y_k&=-\bar{a}_{k+1,k}\text{。}
\end{aligned}$$

解这个方程組而且取这个解的共轭值，卽得

$$\bar{y}_m=-\frac{\Delta'_m}{\Delta'} \qquad (m=1, 2, \cdots, k) \quad (33)$$

$$\bar{y}_{k+1}=1, \ \bar{y}_{k+2}=\bar{y}_{k+3}=\cdots=\bar{y}_n=0,$$

其中

$$\Delta'=\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{21}, & \cdots, & a_{k1} \\ a_{12}, & a_{22}, & \cdots, & a_{k2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1k}, & a_{2k}, & \cdots, & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0,$$

而Δ'_m是将Δ'中第m列用$a_{k+1,1}, \cdots a_{k+1,k}$替换而得来的。現在来决定由剛才解方程組(32)得到的矢量$\boldsymbol{y}$与矢量$\boldsymbol{b}(b_1, b_2, \cdots, b_n)$垂直的条件。这条件是

$$(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y})=-\sum_{m=1}^{k}\frac{\Delta'_m}{\Delta'}b_m+b_{k+1}=0$$

或

$$-\sum_{m=1}^{k}\Delta'_m b_m+\Delta' b_{k+1}=0\text{。} \qquad (34)$$

如在行列式Δ'_m中将行列互换，然后經$(k-m)$个行的对换把第m行换到最后一行的位置，于是我們卽得：

$$-\Delta'_m=\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m-1,1}, & a_{m-1,2}, & \cdots, & a_{m-1,k} \\ a_{m+1,1}, & a_{m+1,2}, & \cdots, & a_{m+1,k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1}, & a_{k2}, & \cdots, & a_{kk} \\ a_{k+1,1}, & a_{k+1,2}, & \cdots, & a_{k+1,k} \end{vmatrix}\cdot(-1)^{k+1+m}。$$

这恰好是下面的特征行列式的元素 b_m 的代数余子式：

$$\Delta_{k+1}=\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1k}, & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1}, & a_{k2}, & \cdots, & a_{kk}, & b_k \\ a_{k+1,1}, & a_{k+1,2}, & \cdots, & a_{k+1,k}, & b_{k+1} \end{vmatrix},$$

条件(34)恰好表示这特征行列式等于零。同理，对于 $y_{k+s}=1$ 我們得到条件 $\Delta_{k+s}=0$ 。因此，我們得到下面的結果：如果方程組(30)的行列式等于零，則这方程組有解的必要且充分的条件为，矢量 $(b_1, \cdots, b_n)$ 与关联的齐次方程組(32)的解所成的所有矢量正交。

方程組(30)的一般解是这方程組的任何一个特别解与其对应的齐次方程組的一般解之和，而所謂对应的齐次方程組是在方程組(30)中將所有 b_j 换成零而得到的。这个齐次方程組的一般解將含有 $(n-k)$ 个任意常数。

最后再来說出关于綫性方程組的基本定理的一个几何解释，这个解释在以后是重要的。假設給出含有 n 个未知数的 n 个綫性型：

$$y_1=a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n=a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n。$$

我們假定 x_s 可以取任意的复数值而把 $(y_1, \cdots, y_n)$ 看作某一

矢量的分量。如果行列式$|a_{ik}|$不等于零，則任意給定的值y_k都可从适当的值x_k得到，因而上面的公式給予我們整个n維空間$\boldsymbol{y}$。現在假定，表$|a_{ik}|$的秩r小于n。不失普遍性，可以把位于左上角的r阶行列式看作不等于零。此时，关于綫性方程組的基本定理告訴我們：由上面公式所确定的值$(y_1, \cdots, y_n)$的集合具有这样的性质，即$y_1, \cdots, y_r$的值可以任意，但是，如果这些y_i的值一經取定，則$y_{r+1}, \cdots, y_n$的值即跟着完全决定，即这些值是根据特征行列式等于零的条件而得到的。用几何的話来說，意思就是，上面的公式确定一r維子空間而且它可由如下得到的r个矢量生成：令某一个$y_s(s=1, 2, \cdots, r)$为1而令其余的全为零。那末，如果表$|a_{ik}|$的秩为r，則上面公式給出一个矢量$(y_1, \cdots, y_n)$，而这些矢量确定一个r維子空間。

上面我們所考慮的是綫性型的个数等于变数x_s的个数的情形。現在看一般情形

$$y_1 = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_m = a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n\text{。}$$

在这种情形下，这个公式对于任意的x_s确定一个包含在m維空間内的子空間，它的維数等于表$\|a_{ik}\|$的秩。証明与前面的完全一样。

16. 格拉姆行列式，阿达馬不等式 假設取m个矢量：

$$x^{(s)}(x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, \cdots, x_n^{(s)}) \qquad (s=1, 2, \cdots, m)\text{。}$$

作一个以数量积$(x^{(i)}, x^{(k)})$为元素的m阶行列式并且引进下面的記号：

$$G(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(m)}) = |(x^{(i)}, x^{(k)})|_1^m =$$

$$= \begin{vmatrix} (x^{(1)}, x^{(1)}), & (x^{(1)}, x^{(2)}), & \cdots, & (x^{(1)}, x^{(m)}) \\ (x^{(2)}, x^{(1)}), & (x^{(2)}, x^{(2)}), & \cdots, & (x^{(2)}, x^{(m)}) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ (x^{(m)}, x^{(1)}), & (x^{(m)}, x^{(2)}), & \cdots, & (x^{(m)}, x^{(m)}) \end{vmatrix} \qquad (35)$$

这个行列式叫做矢量

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(m)}$$

的格拉姆行列式。

现在分成下面三种情况来討論：

$$m=n, \ m<n \text{ 与 } m>n。$$

上面行列式的一般项为

$$(x^{(i)}, x^{(k)})=\sum_{s=1}^{n} x_s^{(i)} \bar{x}_s^{(k)}。$$

当 $m=n$ 时行列式(35)等于下列行列式的乘积

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & \cdots, & x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)}, & x_2^{(2)}, & \cdots, & x_n^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(n)}, & x_2^{(n)}, & \cdots, & x_n^{(n)} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \bar{x}_1^{(1)}, & \bar{x}_1^{(2)}, & \cdots, & \bar{x}_1^{(n)}, \\ \bar{x}_2^{(1)}, & \bar{x}_2^{(2)}, & \cdots, & \bar{x}_2^{(n)}, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{x}_n^{(1)}, & \bar{x}_n^{(2)}, & \cdots, & \bar{x}_n^{(n)}, \end{vmatrix},$$

这里的乘法是应用行与列相乘的法则，注意行列式的值并不因行列互换而改变，由是可知第二个因子与第一个因子是共轭的复数，所以格拉姆行列式(35)当 $m=n$ 时等于行列式 $|x_k^{(i)}|_1^n$ 的模的平方，而行列式 $|x_k^{(i)}|_1^n$ 系由矢量 $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(n)}$ 的分量 $x_k^{(i)}$ 为元素組成的。因此，行列式(35)当上述矢量綫性无关时取正值，当它們綫性相关时等于零[12]。当 $m\neq n$ 时我們有两个长方表：

$$\left\| \begin{matrix} x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & \cdots, & x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)}, & x_2^{(2)}, & \cdots, & x_n^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(m)}, & x_2^{(m)}, & \cdots, & x_n^{(m)} \end{matrix} \right\| \quad (36_1) \quad \text{与} \quad \left\| \begin{matrix} \bar{x}_1^{(1)}, & \bar{x}_1^{(2)}, & \cdots, & \bar{x}_1^{(m)} \\ \bar{x}_2^{(1)}, & \bar{x}_2^{(2)}, & \cdots, & \bar{x}_2^{(m)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{x}_n^{(1)}, & \bar{x}_n^{(2)}, & \cdots, & \bar{x}_n^{(m)} \end{matrix} \right\| \quad (36_2)$$

与行列式(35)对应的表是上面两个表的乘积[7]。由于[7]中的定理，行列式(35)当 $m>n$ 时等于零。但是在这种情形下矢量 $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(m)}$ 是綫性相关的[12]。当 $m<n$ 时，由于剛才提到的定理

$$G(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(m)})=\sum_{r_1<r_2<\cdots<r_m} X\begin{pmatrix} 1, & 2, & \cdots, & m \\ r_1, & r_2, & \cdots, & r_m \end{pmatrix} Y\begin{pmatrix} r_1, & r_2, & \cdots, & r_m \\ 1, & 2, & \cdots, & m \end{pmatrix},$$

其中 $X\begin{pmatrix} 1, & 2, & \cdots, & m \\ r_1, & r_2, & \cdots, & r_m \end{pmatrix}$ 表示表(36_1)中的子式，而 $Y\begin{pmatrix} r_1, & r_2, & \cdots, & r_m \\ 1, & 2, & \cdots, & m \end{pmatrix}$ 表示表(36_2)中的子式。与上面一样，$Y\begin{pmatrix} r_1, & r_2, & \cdots, & r_m \\ 1, & 2, & \cdots, & m \end{pmatrix}$ 与 $X\begin{pmatrix} 1, & 2, & \cdots, & m \\ r_1, & r_2, & \cdots, & r_m \end{pmatrix}$ 是共軛的复数，因而上面公式可换写成下面的形式

$$G(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(m)})=\sum_{r_1<r_2<\cdots<r_m} \left| X\begin{pmatrix} 1, & 2, & \cdots, & m \\ r_1, & r_2, & \cdots, & r_m \end{pmatrix} \right|^2。 \quad (37)$$

如果 $(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(m)})$ 綫性无关，則表(36_1)的秩等于 m[12]，因而在等式(37)右端的那些项中至少有一项是正的。如果上述的矢量是綫性相关的，則表(36_1)的秩小于 m，因而所有含于这个表中的 m 阶行列式皆等于零，于是从(37)即可推出，这情形下 $G(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(m)})=0$。所以，总結所考虑的三种情形：$m=n$, $m>n$ 与 $m<n$

的結果，我們得到下列的一般的定理。

定理 格拉姆行列式 $G(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(m)})$，当矢量 $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(m)}$ 綫性无关时，是正的，而当这些矢量綫性相关时等于零。

現在我們再来証明一个关于格拉姆行列式的公式。首先規定一些記号。假設 x 是 B_n 中的任意一个矢量，而且对于它有如下的分解式：$x=y+z$，其中 y 属于由矢量 $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(m)}$ 生成的子空間，而 z 是一个与这子空間正交的矢量。我們要来証明的公式就是

$$G(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(m)}, x)=\|z\|^2 G(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(m)})。\tag{38}$$

如果注意到等式：

$$(x^{(s)}, x)=(x^{(s)}, y)；(x, x^{(s)})=(y, x^{(s)}),$$

这是从 z 与所有 $x^{(s)}$ 正交这一性质而来的，以及公式 $(x, x)=(y, y)+(z, z)$ [13]，于是

$$G(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(m)}, x)=$$

$$=\begin{vmatrix} (x^{(1)}, x^{(1)}), & (x^{(1)}, x^{(2)}), & \cdots, & (x^{(1)}, x^{(m)}), & (x^{(1)}, y) \\ (x^{(2)}, x^{(1)}), & (x^{(2)}, x^{(2)}), & \cdots, & (x^{(2)}, x^{(m)}), & (x^{(2)}, y) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ (x^{(m)}, x^{(1)}), & (x^{(m)}, x^{(2)}), & \cdots, & (x^{(m)}, x^{(m)}), & (x^{(m)}, y) \\ (y, x^{(1)}), & (y, x^{(2)}), & \cdots, & (y, x^{(m)}), & (y, y)+(z, z) \end{vmatrix}。$$

将最后一行的元素換写成：

$$(y, x^{(1)})+0, (y, x^{(2)})+0, \cdots, (y, x^{(m)})+0, (y, y)+(z, z)$$

然后根据[3]中性质 IV，将上面行列式換写两个行列式的和：

$$G(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(m)}, x)=G(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(m)}, y)+$$

$$+\begin{vmatrix} (x^{(1)}, x^{(1)}), & (x^{(1)}, x^{(2)}), & \cdots, & (x^{(1)}, x^{(m)}), & (x^{(1)}, y) \\ (x^{(2)}, x^{(1)}), & (x^{(2)}, x^{(2)}), & \cdots, & (x^{(2)}, x^{(m)}), & (x^{(2)}, y) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ (x^{(m)}, x^{(1)}), & (x^{(m)}, x^{(2)}), & \cdots, & (x^{(m)}, x^{(m)}), & (x^{(m)}, y) \\ 0, & 0, & \cdots, & 0, & \|z\|^2 \end{vmatrix}。\tag{39}$$

矢量 y 属于由矢量 $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(m)}$ 所生成的子空間，也就是，y 可表成 $x^{(s)}$ 的綫性組合，所以根據上面証明过的定理：

$$G(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(m)}, y)=0。$$

将(39)式中的行列式按最后一行展开，我們即得公式(38)。

从这个公式直接得到下面等式

$$G(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(m)}, x)\leqslant\|x\|^2 G(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(m)})。\tag{40}$$

必須指出，如果矢量 $x^{(s)}$ 綫性相关，则

$$G(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(m)}, x)=G(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(m)})=0。$$

如果 $x^{(s)}$ 綫性无关，则在不等式(40)中，在而且只有 $y=0$ 时，即 x 与所有 $x^{(s)}$ 正交的时候，等号才能成立。

如果我們反复应用不等式(40)于原来的格拉姆行列式 $G(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(m)})$，则得到它的一个估值：

$$G(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(m)}) \leqslant \|x^{(1)}\|^2 \|x^{(2)}\|^2 \cdots \|x^{(m)}\|^2。 \tag{41}$$

这里应該注意到 $G(x^{(1)}) = \|x^{(1)}\|^2$。

(41)中的等号在而且只有在矢量两两正交时才能成立。这里我們假定矢量中沒有一个是零矢量。不等式(41)使得我們有可能对任意的行列式的值作一个估計。假設 Δ 是具有元素 a_{ik} 的 n 阶行列式。将这个行列式的第 i 行元素 $(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$ 看作 R_n 中某一个矢量 $x^{(i)}$ 的分量。用与 a_{ik} 共軛的 $\bar{a}_{ik}$ 为元素作一新行列式，它显然等于 $\bar{\Delta}$。按行与行相乘的法則作行列式 Δ 与 $\bar{\Delta}$ 的乘积，即得格拉姆行列式 $G(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(n)})$，它的值按照行列式的乘法定理等于 $\Delta\bar{\Delta}$，也即等于 $|\Delta|^2$。然后应用不等式(41)，我們得到关于行列式的模的一个估值，即阿达馬不等式：

$$|\Delta|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_{1k}|^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} |a_{2k}|^2 \cdots \sum_{k=1}^{n} |a_{nk}|^2。 \tag{42}$$

如果行列式 Δ 的元素为实数，则上式可写成：

$$\Delta^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_{1k}^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} a_{2k}^2 \cdots \sum_{k=1}^{n} a_{nk}^2。 \tag{43}$$

如果对于行列式 Δ 的元素有下面的估值：

$$|a_{ik}| \leqslant M \qquad (i, k=1, 2, \cdots, n),$$

则显然有

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \leqslant nM^2,$$

根据(42)即得估值：

$$|\Delta| \leqslant n^{\frac{n}{2}} M^n。 \tag{44}$$

根据上面的叙述，(42)中的等号在而且只有在矢量 $x^{(i)}$ 两两正交的时候才能成立。

我們还可以得到关于格拉姆行列式的其他估值。这是根据一个由推广不等式(40)而得来的新不等式。

假設文字 X, Y, Z 各表由 R_n 中一些矢量作成的序列。剛才提到的不等式(40)的一个推广就是

$$G(X, Y, Z) \cdot G(X) \leqslant G(X, Z) \cdot G(X, Y)。 \tag{45}$$

在这个不等式中可以允許矢量序列是空的，所謂空的矢量序列就是不含有任何矢量的序列。如果 W 是这样一个序列，则假定 $G(W)=1$。

根据这个不等式我們可以得到下面的格拉姆行列式的另一估值：

$$G(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(m)}) \leqslant \left[\prod_{k=1}^{m} G(x^{(1)}, \cdots, x^{(k-1)}, x^{(k+1)}, \cdots, x^{(m)})\right]^{\frac{1}{m-1}},$$

其中 Π 是乘积記号。反复应用这个不等式可以导出新的不等式，使得其中的格拉姆行列式含有为数更少的矢量。在所有这些不等式中，在而且只有在矢量两两正交的时候，等号才能成立。剛才提到的格拉姆行列式的估値是 M. K. 法格得到的（苏联科学院学报，1946 年，卷 LIV №9）。

17. 常系数綫性微分方程組 現在我們把既得的結果应用于常系数綫性微分方程組的积分問題。这样的方程組可写成

$$\left.\begin{array}{l} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{array}\right\} \tag{46}$$

其中 x_j 为待求的 t 的函数，x_j' 为它的微商，a_{ik} 为給定的常数。我們来求下列形状的解：

$$x_1 = b_1e^{\lambda t};\ x_2 = b_2e^{\lambda t};\ \cdots;\ x_n = b_ne^{\lambda t}。 \tag{47}$$

把它們代入方程組(46)并且消去因子 $e^{\lambda t}$，就得到一个用以决定常数 $b_1, \cdots, b_n$ 的方程組

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11}-\lambda)b_1 + a_{12}b_2 + \cdots + a_{1n}b_n = 0 \\ a_{21}b_1 + (a_{22}-\lambda)b_2 + \cdots + a_{2n}b_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}b_1 + a_{n2}b_2 + \cdots + (a_{nn}-\lambda)b_n = 0 \end{array}\right\} \tag{48}$$

因为，对于未知数 b_j 我們应当得到非零解，因而上述方程組的行列式必須等于零，就是說，我們得到关于常数 λ 的方程：

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}-\lambda, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots, & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0。 \tag{49}$$

这样的方程通常叫做特征方程。当我們考察无阻力的力学体系的振动时，在系数表为对称的，即 $a_{ik}=a_{ki}$ 而且系数皆为实数的

这一特别情形下，这个方程是大家都知道的（以后考察微小振动时我們还要説到它）。現在我們大体上来研究一下这个方程組。方程(49)是一个最高項为 $(-\lambda)^n$ 的 n 次代数方程。如果这方程有 n 个不同的根

$$\lambda=\lambda_1, \cdots, \lambda=\lambda_n,$$

那末，把 $\lambda=\lambda_j$ 的每一个値代入到方程(48)的系数中，我們即得 n 个关于对应的未知数 $b_1, \cdots, b_n$ 的齐次方程組，而且它們的行列式皆为零，因而有可能得到这些未知数的非零解。因此，按照公式(47)我們得到方程(46)的 n 个綫性无关的解，而且它們的綫性組合給出方程組(46)的一般积分。如果特征方程(49)有重根，則求解的問題变得比較复杂，就是說，方程(49)的每一个 k 重根应該相当于方程組(46)的 k 个綫性无关的解，其中有一解一定屬于(47)的形式，而其余的解，一般說来，还包含一个 t 的多項式因子。但是，在現在的情形，与一个常系数方程[II, 40]有不同的地方，就是，在对应于上述重根的解中，可以有多于一个的解（甚至是全部的解）都取(47)的形式。在这里我們不想詳細地研究这种情形，因为，以后利用复变函数的理論，可用别的方法求解方程組(46)。

現在回过来看在我們的問題中起基础作用的特征方程(49)。当 n 大的时候，求解这个方程，甚至于是求它的近似解，有实际的困难，这种困难系由如下的情况所引起，即要求的未知数 λ 不是在某一行或一列，而是在对角綫上，如將这方程的左端按 λ 的冪展开，那就需要在[4]中提到的大量的計算。現在我們來叙述一个变形方法，將方程(49)化成实际計算較为便利的形式，在这种形式中 λ 只在一列出現。这个方法是院士 A. H. 克雷罗夫給出的。可以在他的著作“在技术問題中确定物质体系的微小振动的频率的方程的数值解法”（苏联科学院汇报，1931年）中找到。

作一个待求諸量的綫性組合

$$\xi=\alpha_{01}x_1+\alpha_{02}x_2+\cdots+\alpha_{0n}x_n, \tag{50}$$

其中 α_{0j} 为用任何方式取定的数字系数。將方程(50)对 t 求微商 n 次，每求一次微商之后，即用方程組(46)中的表达式代入等式右端的微商 x'_j。这样我們得到 $(n+1)$ 个方程：

$$\left.\begin{array}{r}\xi=\alpha_{01}x_1+\alpha_{02}x_2+\cdots+\alpha_{0n}x_n\\ \xi'=\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\cdots+\alpha_{1n}x_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \xi^{(n-1)}=\alpha_{n-1,1}x_1+\alpha_{n-1,2}x_2+\cdots+\alpha_{n-1,n}x_n\\ \xi^{(n)}=\alpha_{n1}x_1+\alpha_{n2}x_2+\cdots+\alpha_{nn}x_n\text{。}\end{array}\right\}\tag{51}$$

假設由头 n 个方程的系数 α_{ik} 所組成的行列式不等于零。此时由头 n 个方程可以把 x_j 用 $\xi,\ \xi',\ \cdots,\ \xi^{(n-1)}$ 表达出来，然后将这些表达式代入最后一个方程中，于是即得一个 ξ 的 n 級方程。借助行列式，我們也可以直接从 $(n+1)$ 个方程消去 x_j。实际上，把这些方程改写成下面形式：

$$\begin{array}{c}\xi x_0+\alpha_{01}x_1+\alpha_{02}x_2+\cdots+\alpha_{0n}x_n=0\\ \xi'x_0+\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\cdots+\alpha_{1n}x_n=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \xi^{(n)}x_0+\alpha_{n1}x_1+\alpha_{n2}x_2+\cdots+\alpha_{nn}x_n=0,\end{array}$$

其中 $x_0=-1$，就可以把这 $(n+1)$ 个方程看作关于量 $x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n$ 的齐次方程組。

上面这方程組的行列式必須等于零，于是我們就得到消去 x_j 后的要求的結果

$$\begin{vmatrix}\xi, & \alpha_{01}, & \alpha_{02}, & \cdots, & \alpha_{0n}\\ \xi', & \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \cdots, & \alpha_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \xi^{(n)}, & \alpha_{n1}, & \alpha_{n2}, & \cdots, & \alpha_{nn}\end{vmatrix}=0\text{。}\tag{52}$$

我們来求这个方程的取下面形式的解：

$$\xi=e^{\lambda t}\text{。}$$

把这个解代入行列式 (52) 的头一列而且把因子 $e^{\lambda t}$ 提到行列式記号之外，然后消去这个因子，我們即得到一个决定 λ 的方程：

$$\begin{vmatrix}1, & \alpha_{01}, & \alpha_{02}, & \cdots, & \alpha_{0n}\\ \lambda, & \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \cdots, & \alpha_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \lambda^n, & \alpha_{n1}, & \alpha_{n2}, & \cdots, & \alpha_{nn}\end{vmatrix}=0\text{。}\tag{53}$$

不难証明，在上述的假設下，方程 (53) 与方程(49)具有相同的根。实际上，假設 $\lambda=\lambda_0$ 为方程(53)的某一根于是方程(52)即有下列形式的解：

$$\xi=Ce^{\lambda_0 t},\tag{54}$$

其中 C 为任意常数。此时，由方程組(51)的头 n 个方程，我們得到 x_j 的一解，其形式如 (47) 而 $\lambda=\lambda_0$，这就是說，$\lambda=\lambda_0$ 是方程 (49) 的一个根。反之，如果 $\lambda=\lambda_0$ 是方程 (49) 的一个根，则我們对 x_j 有形式如(47)的一解，而 $\lambda=\lambda_0$，其中 b_j 为数字常数而且不全为零。把这些 x_j 的表达式代入方程組(51)的头一个中，我們即得 ξ 的形式为(54)的一解，而且这个解一定不等于零。假如不然，我們将有

$$\xi=\xi'=\cdots=\xi^{(n-1)}=0,$$

由是，根据方程組(51)的头 n 个方程，直接得到

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=0。$$

所以，方程(49)的每个根确实为方程(53)的根。这样一来，根据我們的上述假設，方程(53)与方程(49)有完全一样的根。这个方法对于数字的例子的应用以及对于用于我們的假設不成立的情形的考察，在上面提到的院士 A. H. 克雷罗夫的著作中可以找到。

如果让公式(50)取 $\xi=x_1$ 的形式，则只需要最簡单的計算。在这种情形下，方程(53)将取下面的形式：

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 0, & \cdots, & 0 \\ \lambda, & a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda^n, & a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots, & a_{nn} \end{vmatrix}=0①。$$

不看方程組(46)我們来考虑下面的二阶方程組：

$$\left.\begin{aligned} x_1''&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ x_2''&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n''&=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n。\end{aligned}\right\} \tag{55}$$

这样的方程組在力学中时常遇見。如果要求它的下列形式的解

$$x_j=b_j\cos(\lambda t+\varphi),$$

则我們得到关于 λ 的方程：

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda^2, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}+\lambda^2, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots, & a_{nn}+\lambda^2 \end{vmatrix}=0。 \tag{56}$$

常数 b_j 可以由类似于(48)的方程組来决定，而 φ 是任意的。

最后，我們来看方程組：

① 对于特征方程的变换，A. 丹尼列夫斯基曾經給过一个簡单而适用的方法（数学汇报3编，卷2，1期）。

$$\left.\begin{aligned} x_1'' &= a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n+c_{11}x_1'+\cdots+c_{1n}x_n' \\ x_2'' &= a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n+c_{21}x_1'+\cdots+c_{2n}x_n' \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n'' &= a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n+c_{n1}x_1'+\cdots+c_{nn}x_n', \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

这个方程組含有一阶微商。如果我們仍然求形式如(47)的解，则我們得到下面的特征方程：

$$\begin{vmatrix} a_{11}+c_{11}\lambda-\lambda^2, & a_{12}+c_{12}\lambda, & \cdots, & a_{1n}+c_{1n}\lambda \\ a_{21}+c_{21}\lambda, & a_{22}+c_{22}\lambda-\lambda^2, & \cdots, & a_{2n}+c_{2n}\lambda \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+c_{n1}\lambda, & a_{n2}+c_{n2}\lambda, & \cdots, & a_{nn}+c_{nn}\lambda-\lambda^2 \end{vmatrix}=0。\tag{58}$$

如引入补充的未知数

$$x_{n+1}=x_1',\ x_{n+2}=x_2',\ \cdots,\ x_{2n}=x_n', \tag{59}$$

则方程組 (57) 化成 $2n$ 个一阶方程，其中 n 个方程可以从方程組(57)作如下的替换

$$x_j''=x_{n+j}' \text{ 与 } x_j'=x_{n+j} \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

而得到，而其余 n 个则是方程(59)。

18. 函数行列式　假設有 n 个变数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 n 个函数

$$\varphi_1(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n);\ \varphi_2(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n);\ \cdots;\ \varphi_n(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)。\tag{60}$$

这些函数对于变数 x_s 的函数行列式定义为这样一个 n 阶行列式，其元素系按公式：$a_{ik}=\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}$ 計算而得来的。对于函数行列式我們引用一个特别的記号：

$$\frac{D(\varphi_1,\ \cdots,\ \varphi_n)}{D(x_1,\ \cdots,\ x_n)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}, & \cdots, & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}, & \cdots, & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial x_2}, & \cdots, & \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}。\tag{61}$$

讲重积分换元法则时[II, 57 与 60]，我們曾經見过这样的行列式。如果我們在平面上施行换元：

$$x=\varphi(u, v);\quad y=\psi(u, v), \tag{62}$$

它将点(u, v)变到点(x, y)，則函数行列式

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \tag{63}$$

的絕对值为在点变换(62)下在指定的点(u,v)的面积改变的系数，这里我們假定，在应用点变换(62)的区域內，函数(62)对于变数u与v的偏微商是連續的以及行列式(63)不等于零。用同样的方法，如果在三維空間內有一个点变换：

$$x=\varphi(q_1, q_2, q_3);\ y=\psi(q_1, q_2, q_3);\ z=\omega(q_1, q_2, q_3);$$

它把坐标为(q_1, q_2, q_3)的点变到点(x, y, z)，而区域(V_1)变到区域(V)，則在三重积分下的换元公式取下列形式[II, 60]：

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{(V_1)} f(\varphi, \psi, \omega)\,|D|\,dq_1dq_2dq_3,$$

其中

$$D=\frac{D(\varphi, \psi, \omega)}{D(q_1, q_2, q_3)},$$

而$|D|$为在由点(q_1, q_2, q_3)到点(x, y, z)的变换下在指定的点的体积改变的系数。

完全一样，我們也可以考虑一个只含一个自变数的函数：

$$u=f(x),$$

把它看作坐标軸OX上的点变换，它把横坐标为x的点变到横坐标为u的点。此时，微商的絕对值$|f'(x)|$显然是在指定的点的线段长度改变的系数。上述的一切結果可以推广到n維空間內点变换情形以及n重积分的换元。

就二維与三維的情形所闡明的函数行列式与微商之間的相似性还以一些属于形式的性质之間的某些相似性作为它的推論。这是我們現在要来証明的。

假設有函数組

$$\varphi_1(y_1, \cdots, y_n), \cdots, \varphi_n(y_1, \cdots, y_n),$$

而且假設 $y_1, \cdots, y_n$ 不是自变数而它們本身是 $x_1, \cdots, x_n$ 的函数，以至归根到底函数 φ_i 就是变数 x_i 的函数。我们可作三个函数行列式：

$$\frac{D(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)}{D(y_1, \cdots, y_n)}; \quad \frac{D(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)}{D(x_1, \cdots, x_n)}; \quad \frac{D(y_1, \cdots, y_n)}{D(x_1, \cdots, x_n)}。$$

这些函数行列式的元素分别是

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}; \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}; \quad \frac{\partial y_i}{\partial x_k}。$$

但是按照复合函数的微分法則，我們有

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \cdots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_n} \cdot \frac{\partial y_n}{\partial x_k},$$

如按照行与列相乘的公式来应用关于行列式乘法的定理，我們得到表达函数行列式的第一个性质的等式：

$$\frac{D(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)}{D(x_1, \cdots, x_n)} = \frac{D(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)}{D(y_1, \cdots, y_n)} \cdot \frac{D(y_1, \cdots, y_n)}{D(x_1, \cdots, x_n)}。 \quad (64)$$

这个等式类似于一个自变数的复合函数的微分法則。

我們还要来說明函数行列式的另一个性质。函数組 φ_i 可以看作从变数 x_i 到新变数 φ_i 的变换：

$$\varphi_i = \varphi_i(x_1, \cdots, x_n) \quad (i=1, 2, \cdots, n)。 \quad (65)$$

首先来注意一个特殊情形，即所謂恒等变換的情形：

$$\varphi_1 = x_1; \quad \varphi_2 = x_2; \quad \cdots, \quad \varphi_n = x_n。$$

它的函数行列式为

$$\begin{vmatrix} 1, 0, 0, \cdots, 0 \\ 0, 1, 0, \cdots, 0 \\ 0, 0, 1, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0, 0, 0, \cdots, 1 \end{vmatrix} = 1。$$

現在，方程(65)可以对 x_i 来解，使得 x_i 借 φ_i 表达出来：

$$x_i = x_i(\varphi_1, \cdots, \varphi_n) \quad (i=1, 2, \cdots, n)。\tag{66}$$

变換(66)自然地叫做(65)的逆变換。如果把表达式(66)代入等式(65)的右端，則得到恒等式 $\varphi_1=\varphi_1$；…，$\varphi_n=\varphi_n$，或者換句話說，得到恒等变換。現在將公式(64)应用于这个特殊情形，这时必須认为 $y_i=x_i$ 与 $x_i=\varphi_i$，可是在公式(64)的左端我們得到恒等变換的函数行列式：

$$\frac{D(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)}{D(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)} = \frac{D(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)}{D(x_1, \cdots, x_n)} \cdot \frac{D(x_1, \cdots, x_n)}{D(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)}$$

或

$$\frac{D(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)}{D(x_1, \cdots, x_n)} \cdot \frac{D(x_1, \cdots, x_n)}{D(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)} = 1, \tag{67}$$

就是說，变換以及其逆变換的函数行列式的乘积等于1。这个性質类似于一个自变数的函数的反函数的微商的性質。

現在来闡明函数

$$\varphi_1(x_1, \cdots, x_n); \quad \varphi_2(x_1, \cdots, x_n); \quad \cdots; \quad \varphi_n(x_1, \cdots, x_n)$$

对于变数 x_s 的函数行列式

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)}{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)} \tag{68}$$

恒等于零这个条件的意义。假設这些函数是被一个函数关系联結着：

$$F(\varphi_1, \cdots, \varphi_n) = 0, \tag{69}$$

这里等式(69)是关于自变数 x_j 的恒等式。求它对所有自变数的微商，于是得到 n 个恒等式：

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial \varphi_1} \cdot \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \cdots + \dfrac{\partial F}{\partial \varphi_n} \cdot \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial F}{\partial \varphi_1} \cdot \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \cdots + \dfrac{\partial F}{\partial \varphi_n} \cdot \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} = 0。\end{array}\right\} \tag{70}$$

我們可以把这 n 个恒等式看作下列 n 个量

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi_1}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial \varphi_n}$$

的綫性方程，而且显然这些量不可能同时恒等于零，因为，不然的話，F 將不含有任何一个函数 φ_i。因此，齐次方程組(70)的行列式必須等于零，也就是說，函数行列式

(68)等于零。那末，从函数关系(69)的存在推出函数行列式(68)恒等于零。它的逆定理也是可以証明的，但我們这里不証明它。总之，函数行列式(68)恒等于零是这些函数 $\varphi_i(x_1, \cdots, x_n)$ 之間有一个函数关系的必要且充分的条件①。

作为例子我們来看三个含有自变数 x_1, x_2, x_3 的函数：

$$\varphi_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2;\ \varphi_2 = x_1 + x_2 + x_3;\ \varphi_3 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3\,。\tag{71}$$

不难驗算，它們之間有下列关系存在：

$$\varphi_2^2 - \varphi_1 - 2\varphi_3 = 0\,。$$

作出关于函数組(71)的函数行列式：

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} = \begin{vmatrix} 2x_1, & 2x_2, & 2x_3 \\ 1, & 1, & 1, \\ x_2 + x_3, & x_1 + x_3, & x_1 + x_2 \end{vmatrix}。$$

讀者自已可以証明这个行列式恒等于零。

19. 隐函数 在第一卷我們曾經証明关于由一个方程确定的隐函数的存在定理[I,159]。現在我們把这个定理推广到方程組的情形。先把上述已經証过的定理表述如下：設 $x = x_0,\ y = y_0$ 是方程

$$F(x, y) = 0 \tag{72}$$

的解而且設 $F(x, y)$ 与它的一阶偏微商在 $x = x_0,\ y = y_0$ 以及在所有充分逼近这点的值 x, y 是連續的，最后，假設偏微商 $F_y'(x, y)$ 在 $x = x_0,\ y = y_0$ 不等于零。則方程(72)对于充分逼近 x_0 的值 x 确定一个唯一的函数 $y(x)$，它是連續的，具有微商，而且満足条件 $y(x_0) = y_0$。如我們提到过的，完全一样地可以証明，一个具有解 $x = x_0,\ y = y_0,\ z = z_0$ 的方程

$$F(x, y, z) = 0,$$

在函数 $F(x, y, z)$ 以及它的一阶偏微商在上述的值的邻域为連續而且 $F_z'(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ 的条件下，确定一个唯一的函数 $z(x, y)$，它在 $x = x_0,\ y = y_0$ 的邻域連續，具有对 x 及 y 的偏微商而且満足条件 $z(x_0, y_0) = z_0$。現在来考察两个方程的組

$$\varphi(x, y, z) = 0;\ \psi(x, y, z) = 0\,。\tag{73}$$

假設这方程組有解 $x = x_0,\ y = y_0,\ z = z_0$，函数 $\varphi(x, y, z)$，$\psi(x, y, z)$ 以及它的偏微商在上述值的邻域内連續，而且函数行列式

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(y, z)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}, & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial y}, & \dfrac{\partial\psi}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial y} \tag{74}$$

在变数取上述值时不等于零。于是，方程組(73)对于充分逼近 x_0 的值确定一个唯一

---

① 注意，我們对于方程組(70)的討論是形式的。严格說来，并不是一个証明。

的函数組 $y(x)$，$z(x)$，它們連續，具有一阶微商而且滿足条件 $y(x_0)=y_0$，$z(x_0)=z_0$。

因为表达式(74)在 $x=x_0$，$y=y_0$，$z=z_0$ 不等于零，則在 $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ 与 $\frac{\partial\psi}{\partial z}$ 中至少有一个不等于零。譬如說，假設 $\frac{\partial\psi}{\partial z}$ 在变数取上述值时不等于零。按照上述定理，(73) 中第二个方程唯一地确定一个函数 $z(x, y)$。把这个函数代入方程組中第一个方程中，得到一个两个变数 x 与 y 的函数：

$$\varphi[x, y, z(x, y)]=0。\tag{75}$$

为了証明本定理，我們只需証明，方程(75)的左端对 y 的偏微商在 $x=x_0$，$y=y_0$ 不等于零。这个偏微商表成

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y},\tag{76}$$

其中 $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$ 为函数 $\varphi(x, y, z)$ 对 y 的全微商。函数 $z(x, y)$ 是(73)中第二个方程的解，所以下式

$$\psi[x, y, z(x, y)]=0$$

是一个恒等式。

由这个恒等式对 y 求微商：

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0。\tag{77}$$

在(76)的两端乘以 $\frac{\partial\psi}{\partial z}$，在恒等式(77)的两端乘以 $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$，然后相加，經过初等变換之后，于是我們得到

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=\frac{D(\varphi, \psi)}{D(y, z)}。$$

当 $x=x_0$，$y=y_0$ 时，函数 $z(x, y)$ 的值为 z_0，而且当变数取上述值时，$\frac{\partial\psi}{\partial z}$ 与(74)都不等于零，因而 $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$ 也不等于零。所以，方程(75)确定一个唯一的函数 $y(x)$。把它代入 $z(x, y)$，于是得到作为 x 的函数看的 z。这个証明不仅对于一个自变数 x 而且对于多个自变数仍然有效。

关于隐函数的普遍定理是：假設由 n 个方程作成的組：

$$F_1(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n)=0;\ \cdots;\ F_n(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n)=0,\tag{78}$$

有一个解

$$x_k=x_k^{(0)},\ y_l=y_l^{(0)}\qquad \begin{pmatrix}k=1, \cdots, m\\ l=1, \cdots, n\end{pmatrix}\tag{79}$$

假設 F_l 在值 (79) 的邻域内为連續函数而且具有連續的一阶偏微商，而且最后假設函数行列式

$$\frac{D(F_1, \cdots, F_n)}{D(y_1, \cdots, y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}, & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}, & \cdots, & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}, & \frac{\partial F_2}{\partial y_2}, & \cdots, & \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1}, & \frac{\partial F_n}{\partial y_2}, & \cdots, & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \tag{80}$$

在値 (79) 不等于零。于是，当 x_k 充分逼近 $x_k^{(0)}$ 时，方程組 (78) 确定唯一的函数組 $y_l(x_1, \cdots, x_m)$，它們連續，具有一阶微商而且滿足条件 $y_l(x_1^{(0)}, \cdots, x_m^{(0)}) = y_l^{(0)}$。

我們来証明这个定理。假設这定理对于 $(n-1)$ 个方程的組成立（当 $n=1$ 和 2 时，它确实成立），我們来証明它对于 n 个方程的組也成立。把行列式 (80) 按第一行元素展开，卽可推知，在这些元素的代数余子式中至少有一个在値 (79) 不等于零，因为行列式本身在値 (79) 按假設不等于零。只要适当改换函数的号碼，則我們可以认为元素 $\frac{\partial F_1}{\partial y_1}$ 的代数余子式不等于零。这个代数余子式是函数 $F_2, \cdots, F_n$ 对于变数 $y_2, \cdots, y_n$ 的函数行列式。按照上面的假定，方程

$$F_2(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n) = 0;\ \cdots;\ F_n(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n) = 0 \tag{81}$$

唯一地确定函数組

$$y_2 = \varphi_2(x_1, \cdots, x_m, y_1);\ \cdots;\ y_n = \varphi_n(x_1, \cdots, x_m, y_1)。 \tag{82}$$

把这些函数代入 (78) 中的第一个方程，得到方程

$$F_1(x_1, \cdots, x_m, y_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n) = 0, \tag{83}$$

由此卽可决定 y_1。現在需要証明的只是，这个方程的左端对于 y_1 的全微商在値 (79) 不等于零。这个微商表成

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\right) = \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \sum_{s=2}^{n} \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_s} \cdot \frac{\partial \varphi_s}{\partial y_1}。 \tag{84}$$

把函数 (82) 代入 (81) 中方程的左端，然后对 y_1 求微商，卽得下列恒等式：

$$\frac{\partial F_l}{\partial y_1} + \sum_{s=2}^{n} \frac{\partial F_l}{\partial \varphi_s} \cdot \frac{\partial \varphi_s}{\partial y_1} = 0 \qquad (l = 2, \cdots, n)。 \tag{85}$$

用 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 依次表行列式 (80) 的第一列元素的代数余子式。将 (84) 乘以 A_1，(85) 乘以 A_l，然后从前者减去后者的諸恒等式。这样我們得到等式：

$$A_1\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\right) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial F_l}{\partial y_1} A_l + \sum_{s=2}^{n} \left[\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial F_l}{\partial \varphi_s} A_l\right] \frac{\partial \varphi_s}{\partial y_1}。$$

在右端的第一个和卽行列式 (80)，为簡便起見我們用 D 来表它，而第二部分括弧中对 l 所作的和数却是 D 中不是第一列的任何其他一列元素与第一列相当元素的代数余子式的乘积的和，而此和为零。此时必須注意，对 φ_s 求微商卽等于对 y_s 求微商。因此，上面的等式变成

$$A_1\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\right) = D。$$

在值(79) D 与 A_1 皆不等于零。由是可知，方程(83)左端对 y_1 的微商也不等于零，因而这个方程确定唯一的函数 $y_1(x_1, \cdots, x_m)$。将它代入函数(82)，最后即得到需要的結果。

关于隐函数的定理的一个特殊情形是关于函数組的反演的定理。設有方程

$$y_k = f_k(x_1, \cdots, x_n) \qquad (k=1, 2, \cdots, n)。 \tag{86}$$

假設函数 f_k 以及它的一阶偏微商在值 $x_k = x_k^{(0)} (k=1, 2, \cdots, n)$ 的邻域連續而且对于这些值函数行列式

$$\frac{D(f_1, \cdots, f_n)}{D(x_1, \cdots, x_n)} \tag{87}$$

不等于零。于是，方程(86)唯一地确定一組在值 $y_k^{(0)} = f_k(x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$ 的邻域作为 $y_1, \cdots, y_n$ 的函数看的 $x_k(y_1, \cdots, y_n)$，而且这些函数連續，具有一阶微商，并适合条件 $x_k(y_1^{(0)}, \cdots, y_n^{(0)}) = x_k^{(0)}$。

为了証明这个定理，只需考虑方程

$$f_k(x_1, \cdots, x_n) - y_k = 0 \qquad (k=1, 2, \cdots, n)。$$

并且应用关于隐函数的定理，不过在現在的情形下的 x_k 有如在那里的 y_i 的作用。

如果 f_k 为变数 x_k 的綫性齐次函数，則方程組(86)取形式

$$y_k = a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n。$$

行列式(87)在現在的情形化为系数 a_{ik} 的行列式 $|a_{ik}|$，克兰姆定理給出这方程有唯一解的可能性。

第二章 綫性变換和二次型

20. 三維空間中的坐标变換 如下类型的变換叫做 n 个变数的綫性变換：

$$\left.\begin{aligned}
x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\
x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n' &= a_{n1}x_n + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n。
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

这个变換可以解釋为从 n 維空間的某一矢量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 到另一个矢量 $(x_1', x_2', \cdots, x_n')$ 的轉換。又可以把 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 看作 n 維空間中点的坐标，那么变換（1）就是从一点到另一点的轉換。

还可以对（1）作另外的解釋，就是：把 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $(x_1', x_2', \cdots, x_n')$ 看作同一矢量的分量（同一点的坐标），而坐标軸的选擇不同。这样，公式（1）就給出了在由一个坐标系到另一个坐标系的轉換中分量（坐标）变換的公式。以前我們已經不止一次地遇到过对于 $n=2$ 和 $n=3$ 的形式为（1）的式子。

在这一章的第一部分將对于形式为（1）的綫性变換进行詳尽的研究。为了清楚起見，我們先討論实的三維空間，然后再进入一般的 n 維空間和复分量的情形。在三維空間的情形中我們从一个最簡单的情形的討論开始，就是变換（1）对应于从一套直角坐标軸到另一套直角坐标軸的轉換的情形。以坐标原点作起点画矢量，显然，我們可以把 (x_1, x_2, x_3) 看作是矢量的分量或者是它的終点的坐标。

从解析几何中知道，直角坐标变换的公式具有如下的形式：

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

这里 a_{ik} 是新坐标軸和旧坐标軸夹角的余弦，它們由下面的表确定：

	X_1	X_2	X_3
X_1'	a_{11}	a_{12}	a_{13}
X_2'	a_{21}	a_{22}	a_{23}
X_3'	a_{31}	a_{32}	a_{33}

(3)

我們知道，在这个情形下系数的表(3)有以下这样的性质，每一行和每一列元素的平方和等于1而且两个不同的行或不同的列相当元素的积的和等于零。行列式

$$|a_{ik}|$$

的值显然是等于[5]一个长方体的体积，它的棱的方向是沿着新的坐标軸而长度为1；这就是說，假如这两个坐标系的轉向是一致的，这个行列式的値等于1；假如轉向相反，它等于 -1。表示从 (x_1', x_2', x_3') 到 (x_1, x_2, x_3) 的逆轉换的变换显然是：

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x_1' + a_{21}x_2' + a_{31}x_3', \\ x_2 &= a_{12}x_1' + a_{22}x_2' + a_{32}x_3', \\ x_3 &= a_{13}x_1' + a_{23}x_2' + a_{33}x_3'. \end{aligned}\right\} \quad (2_1)$$

換句話說，把(2)的系数表中行和列简单的对换一下，就得到了与(2)相逆的变换。这个逆变换的行列式显然就等于变换(2)的行列式。

現在我們来証明，假如变换(2)滿足一个条件的話，那就可以

推出它的系数的上述性质，而这条件是从这問題的几何实质直接得到的，也就是——我們提出下面这个問題：找出所有的形式为（2）的实变换，使得

$$x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2。\qquad (4)$$

問題的这种提法使我們有可能把上面所考虑的变换推广到任何維空間的情形中去。現在来証明，这新問題所要求的变换和我們上面所考虑的变换是一样的，这就是說，我們要来証明，条件（4）可以化成上面所說的系数 a_{ik} 之間的关系。把表达式（2）代入（4）的左边，去括号让平方項的系数等于1，不同变数的积的系数等于零，我們正好得到六个关系式：

$$a_{1k}a_{1l}+a_{2k}a_{2l}+a_{3k}a_{3l}=\delta_{kl}\quad (k,\ l=1,\ 2,\ 3),\qquad (5)$$

其中

$$\delta_{kl}=0\ 当\ k\neq l,\ 而\ \delta_{kk}=1,\qquad (6)$$

这就是說，每一列元素的平方和等于1，不同的列的相当元素乘积的和等于零。这些条件通常叫做关于列的正交条件。从这里一下子就得到，每一列的元素是某一个方向的方向余弦，并且对应于不同的列的方向是互相正交的。从这里可以直接推出，在这情形下的变换（2）和上面所考虑的变换是一样的，并且正交性这个性质不但对于列成立，对于行也成立。

公式（2）也可以不解释成在不变空間中坐标的变换，而看成在一个不变坐标系下空間的变换。首先我們假定变换的行列式等于 $+1$，这就是說，两个坐标系有相同的轉向。这样，我們可以让空間作为一个剛硬的整体带着坐标軸 $(X_1',\ X_2',\ X_3')$ 一齐繞原点轉动，使得这些坐标軸和坐标軸 $(X_1,\ X_2,\ X_3)$ 重合，至于坐标軸 $(X_1,\ X_2,\ X_3)$ 在轉动的过程中我們看作不动的，并且对于它来取每一点在轉动前以及轉动后的坐标。假如某一点 M 在轉动前的坐标是 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$，在轉动之后它占了一个新的位置 M'，坐标为

(x_1', x_2', x_3')。既然点 M 是和坐标軸 (X_1', X_2', X_3') 一齐运动的，而且运动之后 (X_1', X_2', X_3') 和 (X_1, X_2, X_3) 是重合了，所以点 M' 对于坐标軸 (X_1, X_2, X_3) 的坐标 (x_1', x_2', x_3') 就等于点 M 在轉动前对于坐标軸 (X_1', X_2', X_3') 的坐标。因此我們看出，在行列式为 $+1$ 的情形下，公式(2)表示因空間实行轉动的結果任何一点坐标的变换。

現在我們假定，行列式 $|a_{ik}|$ 等于 -1。代替变换(2)我們来看下面这个变换

$$x_i'' = -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - a_{i3}x_3 \quad (i=1, 2, 3)。$$

它的系数仍然有性质(5)，不过系数的行列式等于 $+1$ 了，这就是說，这个变换相当于空間繞原点的一个轉动。为了得到坐标 (x_1', x_2', x_3')，我們必須再做一个变换：

$$x_1' = -x_1''; \quad x_2' = -x_2''; \quad x_3' = -x_3'',$$

而这样一个所有的坐标符号的改变是一个对于原点的对称变换。于是，在行列式为 -1 的情形，变换(2)是相当于空間繞原点的一个轉动再继之以一个对于原点的对称变换。

在上面我們看到，九个系数 a_{ik} 要适合六个关系(5)。因之，它們应当可以由三个独立的参数表示出来。对于空間繞原点轉动的情形我們来举一种选擇参数的方法。

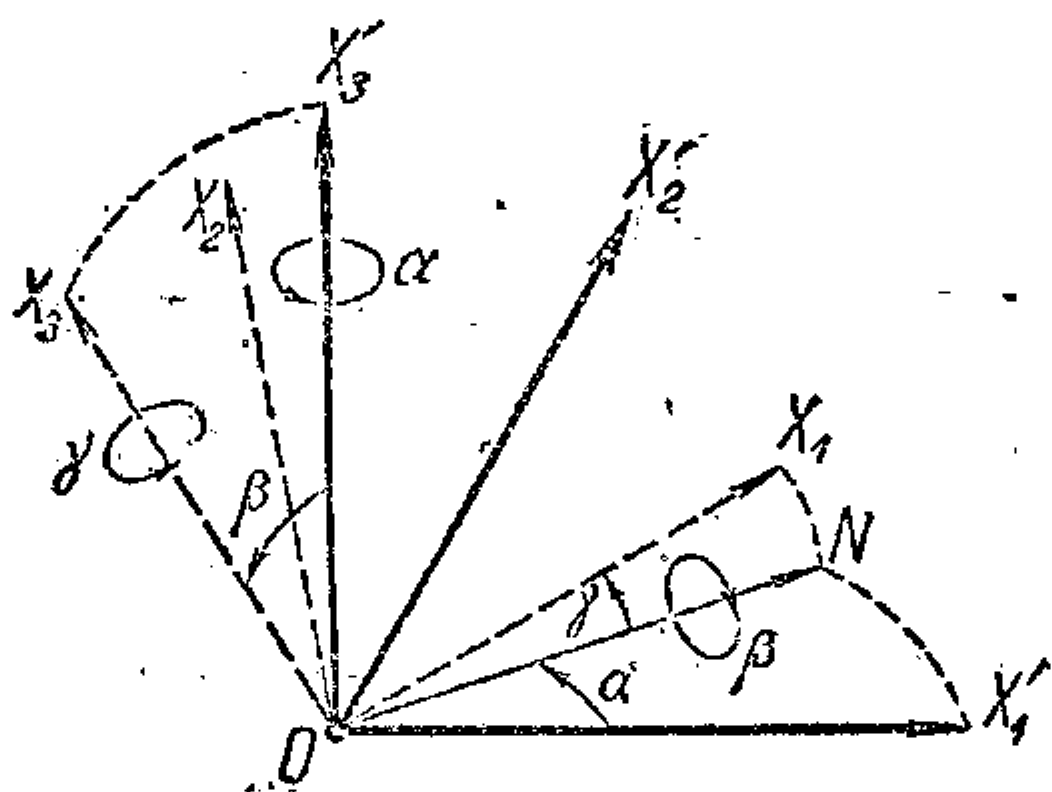


图 1

我們引进两个坐标系：一个是 X_1', X_2', X_3'，它是不动的，对于它們取所有的坐标，另一个是 X_1, X_2, X_3，它是和轉动的空間固定地連在一起的。为了要确定

轉动，我們必須确立三个参数，它們規定第二个坐标系对于第一个坐标系的位置。設 ON (图 1) 是平面 $X_1'OX_2'$ 和平面 X_1OX_2 的交綫。在这条直綫上取一个一定的方向，設 α 是角 $X_1'ON$，它是由 OX_1' 算起的。再引进角 $\beta=X_3'OX_3$ 和 $\gamma=NOX_1$。这三个角完全表現了第二个坐标系对于第一个坐标系的位置，这就是說，完全表現了所施行的轉动。我們用符号 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ 来表示它。由上面直接可以知道，我們的运动是連續施行的三个运动的結果：(1)繞軸 X_3' 轉角度 α；(2)繞軸 X_1' 的新的位置轉角度 β；(3)繞新的軸 X_3 轉角度 γ。这三个角通常叫做尤拉角。我們指出，对于这三个角我們可以写出它們的变化区間

$$0\leqslant\alpha<2\pi;\quad 0\leqslant\beta<\pi;\quad 0\leqslant\gamma<2\pi。$$

如果 $\beta=0$，那么运动 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ 就变成了簡单地繞軸 X_3 轉角度 $\alpha+\gamma$，在这个意义下对任意的 δ 我們有：

$$\{\alpha, 0, \gamma\}=\{\alpha+\delta, 0, \gamma-\delta\}。$$

这个情况指出了在某些情形下对应于空間繞原点的轉动的参数 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ 不是唯一的。同一个运动可以对应于不同的参数值。不难得出把系数 a_{ik} 表成角 α, β, γ 的三角函数的公式 [参看 **62**]。在以下我們还要有其他的参数的选擇法来表現空間繞原点的轉动，并且还会談到尤拉角。

21. 实三維空間的一般綫性变換 現在我們来討論形式为(2)的带有任意系数的实的綫性变換，不过我們始終假定变換的行列式不等于零。

$$|a_{ik}|\neq 0。\tag{7}$$

在这个情形下变換通常叫做正規变換。假如它不滿足条件(5)的話，它是相当于一个空間的变形[**II, 113**]。我們要注意，变換(2)的系数所成的表是可以作为变換的特征的，它完全規定了从任意一个分量为 (x_1, x_2, x_3) 的矢量到一个新的分量为 (x_1', x_2', x_3')

的矢量的轉换的法則。这样一个系数表我們用一个字母来代表

$$A=\left\|\begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{matrix}\right\|, \tag{8}$$

和以前一样，我們在这个表的两边画上双綫，以区別于行列式。它又叫做一个矩陣。表(8)的行列式我們用 $D(A)$ 来表示。这是一个确定的数目。变换(2)我們用符号写成下面的形式：

$$x'=Ax, \tag{9}$$

这里 x' 是分量为 (x'_1, x'_2, x'_3) 的一个矢量，x 是分量为 (x_1, x_2, x_3) 的一个矢量。

使每个矢量保持不变的变换叫做恒等变换。和它相当的表是

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|, \tag{10}$$

这个通常叫做单位表，或者单位矩陣，以符号 I 来代表。

由于 $D(A)\neq 0$，我們可以从方程(2)解出 (x_1, x_2, x_3)，而得到公式：

$$\left.\begin{aligned} x_1&=\frac{A_{11}}{D(A)}x'_1+\frac{A_{21}}{D(A)}x'_2+\frac{A_{31}}{D(A)}x'_3, \\ x_2&=\frac{A_{12}}{D(A)}x'_1+\frac{A_{22}}{D(A)}x'_2+\frac{A_{32}}{D(A)}x'_3, \\ x_3&=\frac{A_{13}}{D(A)}x'_1+\frac{A_{23}}{D(A)}x'_2+\frac{A_{33}}{D(A)}x'_3, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

这里 A_{ik} 是在行列式 $D(A)$ 中元素 a_{ik} 的代数余子式。这个綫性变换通常叫做(2)的逆变换，如果变换(2)的矩陣是用 A 来表示，那么变换(11)的矩陣就用 A^{-1} 来表示。現在我們引入关于两个变换的乘积或者两个矩陣的乘积的概念，这对于以后的討論是很重要的。假定我們有两个綫性变换，一个从 (x_1, x_2, x_3) 到 (x'_1, x'_2, x'_3)：

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned}\right\} \text{或者 } \boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} \tag{12}$$

另一个从(x_1', x_2', x_3')到(x_1'', x_2'', x_3'')：

$$\left.\begin{aligned} x_1'' &= b_{11}x_1' + b_{12}x_2' + b_{13}x_3' \\ x_2'' &= b_{21}x_1' + b_{22}x_2' + b_{23}x_3' \\ x_3'' &= b_{31}x_1' + b_{32}x_2' + b_{33}x_3' \end{aligned}\right\} \text{或者 } \boldsymbol{x}'' = B\boldsymbol{x}'\text{。} \tag{13}$$

先从(x_1, x_2, x_3)到(x_1', x_2', x_3')再从(x_1', x_2', x_3')到(x_1'', x_2'', x_3'')这样的相继轉換可以由一个直接从(x_1, x_2, x_3)到(x_1'', x_2'', x_3'')的轉換来代替，它仍旧是一个綫性变换

$$x_k'' = c_{k1}x_1 + c_{k2}x_2 + c_{k3}x_3 \quad (k=1, 2, 3)\text{。} \tag{14}$$

后面这个綫性变換叫做变換(12)和(13)的乘积，这里指出两个变換施行的次序是极为重要的，把表达式(12)代入公式(13)的右边，我們就得到公式(14)。由此立即得到用相乘的变換的表的元素来表示这两个变換的乘积的表的元素 c_{ik} 的表达式：

$$c_{ik} = \sum_{s=1}^{3} b_{is}a_{sk} \quad (i, k=1, 2, 3)\text{。} \tag{15}$$

变換(14)通常用下面的方式来写：

$$\boldsymbol{x}'' = BA\boldsymbol{x}\text{。} \tag{16}$$

元素为 c_{ik} 的矩陣 C，其中 c_{ik} 是根据公式(15)得到的，叫做矩陣 A 和 B 的乘积，并且写成下面的形式：

$$C = BA, \tag{17}$$

而就变換施行的次序来說，这里必須把乘积看成是从右到左。注意一下关于行列式相乘的定理和公式(15)，我們对于变換的行列式就可以写出一个明显的等式：

$$D(C) = D(B)D(A), \tag{18}$$

这就是說，变換乘积的行列式等于这两个变換行列式的乘积。不

难証明下面的关系，这关系具有简单的几何意义，

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I。\tag{19}$$

此外我們还要注意，从求逆变换的手續我們知道 A^{-1} 的逆变换就是变换A。因为对于 x'_k 来解方程組 (11) 我們显然仍旧得到公式(2)。这件事实可以写成下面的形式：

$$(A^{-1})^{-1}=A。\tag{20}$$

变换乘积的概念可以推广到任意多个因子的情形，这就是：相継施行矩陣为 A, B 和 C 的变換的結果是一个矩陣为 D 的新变換：

$$D=CBA。\tag{21}$$

如果矩陣 A, B 和 C 的元素是

$$a_{ik}, b_{ik} 和 c_{ik};$$

那么它們的乘积矩陣 D 的元素可根据下面的公式来决定：

$$d_{ik}=\sum_{p,q=1}^{3} c_{iq}b_{qp}a_{pk}。\tag{22}$$

事实上，根据(15)对于矩陣 $E=BA$ 的元素我們有公式

$$e_{ik}=\sum_{p=1}^{3} b_{ip}a_{pk}$$

以及对于矩陣 CE 我們有公式

$$d_{ik}=\sum_{q=1}^{3} c_{iq}e_{qk},$$

这正好就是公式(22)。在以后我們常常用符号

$$\{A\}_{ik}$$

来代表矩陣 A 的元素。

一般說来，矩陣的乘积不服从交換律，这就是說，它随着因子的交換而改变，也就是說，一般地 $AB\neq BA$，但是，不难看出，它服从結合律，这就是說，因子能够归并成組：

$$C(BA)=(CB)A。\tag{23}$$

在左边，我們是把矩陣 A 用 B 乘，然后把所得的結果乘以矩

陣 C。在右边，我們是首先把矩陣 B 用 C 乘，然后再把矩陣 A 用剛才乘得的結果来乘。不難看出，在两种情形下最后乘积中所得到的矩陣的元素都是用公式(22)表示。事实上，对于左边在上面已經証明了。至于右边，連續做上面所說的乘法，我們就有：

$$\{CB\}_{ik}=\sum_{q=1}^{3}\{C\}_{iq}\{B\}_{qk}$$

和 $$\{(CB)A\}_{ik}=\sum_{p=1}^{3}\{CB\}_{ip}\{A\}_{pk}=\sum_{p,q=1}^{3}\{C\}_{iq}\{B\}_{qp}\{A\}_{pk}。$$

这个显然就是用新符号所表示的(22)。

我們再来指出綫性变換的一种重要的类型，也就是来考慮变換

$$x_1'=k_1x_1;\quad x_2'=k_2x_2;\quad x_3'=k_3x_3,\tag{24}$$

它們就是沿着坐标軸的伸长，并且系数 k_1, k_2, k_3 就表示这个伸长(或者縮短)的数值。这种变換的矩陣显然有下面的形式：

$$\begin{Vmatrix}k_1, & 0, & 0\\ 0, & k_2, & 0\\ 0, & 0, & k_3\end{Vmatrix},$$

这就是說，所有在主对角綫以外的元素全是零。这种矩陣叫做对角矩陣，我們用符号

$$[k_1,\ k_2,\ k_3]$$

来代表它。

特别地，如果这些数目全相同，也就是說，$k_1=k_2=k_3=k$，那么这个变換就是把矢量的全部分量用同一个数 k 去乘，显然，这就是中心为坐标原点的相似变換。每个矢量不改变方向（我們假定 $k>0$），只是长度改变，并且它的长度是乘上 k 倍。这样一个变換我們簡单地表示成：

$$x'=kx,$$

这就是說，把数 k 看成是矩陣的一个特殊情形，就是主对角綫上有

相同元素 k 的对角矩阵

$$\begin{Vmatrix} k, & 0, & 0 \\ 0, & k, & 0 \\ 0, & 0, & k \end{Vmatrix}。\tag{25}$$

利用(15)不难看出，这样矩阵的乘积就变成平常数的相乘，这就是說：

$$[k,\ k,\ k][l,\ l,\ l]=[kl,\ kl,\ kl]。$$

一般地也很容易驗算，对于对角矩陣，簡单的乘法規則成立

$$[k_1,\ k_2,\ k_3][l_1,\ l_2,\ l_3]=[k_1l_1,\ k_2l_2,\ k_3l_3],\tag{26}$$

这就是說，两个沿着坐标軸的伸长是相当于一个伸长，它的系数等于那两个伸长的相当系数的乘积。从公式(26)顺便可以知道，两个对角矩陣的乘积不因因子次序互換而改变。利用以对角矩陣(25)来表示数以及公式(15)，不难看出，乘积 kA 就是矩陣 A 的所有的元素用数 k 来乘。这个乘积与因子的次序无关，这就是說

$$\{kA\}_{ik}=\{Ak\}_{ik}=k\{A\}_{ik}。\tag{27}$$

以上我們把基本的綫性变換（2）看作空間的变形，它把分量为 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ 的矢量变到一个分量为 $(x'_1,\ x'_2,\ x'_3)$ 的新矢量。当然，如我們前面已經指出的，也可以把这个变換解釋为点的变換；它把坐标为 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ 的点变到坐标为 $(x'_1,\ x'_2,\ x'_3)$ 的点。

在定义矢量的分量时我們可以用任意的坐标系，換句話說，可以用任意的基本单位矢量，这就是說，我們可以取任意三个不共面的矢量 $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}$ 作为基础矢量(作为基本单位矢量)，这时候我們知道，对于任何一个矢量都有一个唯一的表示[**II, 102**]：

$$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{i}+x_2\boldsymbol{j}+x_3\boldsymbol{k}。\tag{28}$$

数 $x_1,\ x_2,\ x_3$ 就叫做矢量 $\boldsymbol{x}$ 在所取的坐标系中的分量，这个坐标系是由基本单位矢量 $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}$ 决定的。現在我們的問題是研究基本单位矢量的不同的选擇对于綫性变換的形式的影响。

严格一些說就是，假如在由基本单位矢量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 决定的坐标系中某一个綫性变换有 (12) 的形式，那么在另外一个由基本单位矢量 $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{k}_1$ 决定的坐标系中，这个同一个綫性变换将是什么样子？假定新的基本单位矢量是由下面的公式用旧的表示：

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{i}_1 &= t_{11}\boldsymbol{i}+t_{12}\boldsymbol{j}+t_{13}\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{j}_1 &= t_{21}\boldsymbol{i}+t_{22}\boldsymbol{j}+t_{23}\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{k}_1 &= t_{31}\boldsymbol{i}+t_{32}\boldsymbol{j}+t_{33}\boldsymbol{k}。\end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

这里要注意，由系数 t_{ik} 組成的行列式一定不为 0。否則，矢量 $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{k}_1$ 就是綫性相关的，也就是說是共面的。在新的坐标系中由公式(28)确定的矢量就有新的分量

$$y_1\boldsymbol{i}_1+y_2\boldsymbol{j}_1+y_3\boldsymbol{k}_1。$$

首先，我們来建立用这个矢量的旧分量表示新分量的公式。把新基本单位矢量的表达式(29)代进去，我們得到：

$$\sum_{s=1}^{3} y_s(t_{s1}\boldsymbol{i}+t_{s2}\boldsymbol{j}+t_{s3}\boldsymbol{k}) = x_1\boldsymbol{i}+x_2\boldsymbol{j}+x_3\boldsymbol{k}。$$

比較 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 的系数，就得到用新分量表示旧分量的公式：

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= t_{11}y_1+t_{21}y_2+t_{31}y_3, \\ x_2 &= t_{12}y_1+t_{22}y_2+t_{32}y_3, \\ x_3 &= t_{13}y_1+t_{23}y_2+t_{33}y_3。\end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

我們看到，这个变换的表和变换 (29) 的表所差的只是行列的互换。事实上，在(29)的表的每一行里第一指标不变，而在(30)的表里是第二指标不变。如果用 T 来代表变换(29)的表，我們就用 $T^{(*)}$ 来代表变换(30)的表，把它叫做 T 的轉置。我們可以把公式(30)比較簡短地写成下面的形式：

$$(x_1, x_2, x_3) = T^{(*)}(y_1, y_2, y_3), \qquad (31)$$

这里(x_1, x_2, x_3)是代表矢量在旧系中的三个分量，而 (y_1, y_2, y_3) 是在新系中的分量。反过来，用旧的分量来表示新的分量的表达

式是:

$$(y_1, y_2, y_3) = T^{(*)-1}(x_1, x_2, x_3),$$

这里 $T^{(*)-1}$ 是与 $T^{(*)}$ 相逆的綫性变换。$T^{(*)-1}$ 通常叫做 T 的逆步变换。为了写起来簡便起見我們用一个特别的字母来代表与它相对应的表

$$U = T^{(*)-1}。 \tag{32}$$

这样一来,我們可以說,当基础单位矢量根据公式(29)变化的时候,每个矢量的分量經受一个表为 U 的綫性变换,它由公式(32)确定。因之,在变换(9)中出現的两个矢量 $\boldsymbol{x}(x_1, x_2, x_3)$ 和 $\boldsymbol{x}'(x_1', x_2', x_3')$,在基本单位矢量变换之后,将要有另外的分量,它們由下面的公式决定:

$$\left.\begin{aligned}(y_1, y_2, y_3) &= U(x_1, x_2, x_3);\\(y_1', y_2', y_3') &= U(x_1', x_2', x_3')。\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

这样一来,我們的問題就是要建立分量 (y_1, y_2, y_3) 和 (y_1', y_2', y_3') 之間的綫性关系。我們可以按照下面的办法把矢量 (y_1, y_2, y_3) 轉换成矢量 (y_1', y_2', y_3'):首先把矢量 (y_1, y_2, y_3) 变到矢量 (x_1, x_2, x_3),这个根据(33)是用表 U^{-1}。然后从矢量 (x_1, x_2, x_3) 变到矢量 (x_1', x_2', x_3'),这个用变换(9)的表,最后再用变换的表 U 把矢量 (x_1', x_2', x_3') 变到矢量 (y_1', y_2', y_3')。最后我們就有下面这个形式的綫性变换:

$$\boldsymbol{y}' = UAU^{-1}\boldsymbol{y}。 \tag{34}$$

这个变换称为与变换(9)相似的变换,它的矩陣 UAU^{-1} 叫做 A 的相似矩陣。

我們把所得的結果叙述如下。如果公式(33)是表示矢量的分量由于基础单位矢量的改变而引起的綫性变换,那么所有的空間的綫性变换,它在旧的基础单位矢量下的形式是:

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x},$$

在新的坐标系中就有以下的形式：

$$y'=UAU^{-1}y。$$

22. 共变的和逆变的仿射矢量　我們假定，綫性变换(9)是简单地表示从一个笛卡尔坐标系到另一个的轉换，就是説，它的系数就是根据表(3)决定的方向余弦。在这个情形下，如在[20]中所看到的，轉置表 $A^{(*)}$ 和表 A^{-1} 是一样的，因之，逆步的表 $A^{(*)-1}$ 就和基本表 A 是一样的，这就是説，

$$A^{(*)}=A^{-1};\quad A^{(*)-1}=A。\tag{35}$$

如果考虑方向和长度都不变的矢量，我們就可以断言，它的分量是根据和坐标变换一样的公式(9)来变换，这就是説，

$$\left.\begin{aligned}x_1'&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3,\\x_2'&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3,\\x_3'&=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3。\end{aligned}\right\}\tag{36}$$

因之我們可以説，在任一个固定的笛卡尔坐标系下一个矢量是被三个数完全决定，在从一个笛卡尔坐标系轉换到另一个的时候，这三个数(矢量的分量)根据和坐标变换相同的公式(36)来变换。現在我們假定，我們所考虑的不仅是从一个笛卡尔坐标系到另一个的轉换，而是一般的所有可能的行列式不为零的坐标的綫性变换，我們知道，这就相当于任意选擇三个不共面的矢量作为基础单位矢量。和以前一样，在考虑变换(36)的表 A 的同时，还要考虑逆步的表 $V=A^{(*)-1}$。在一般的情形下它們是不同的，因之在任意的坐标的綫性变换下我們就可能有两种矢量的定义。第一，我們可以把矢量定义为三个数，在从一个坐标系轉换到另一个的时候，这三个数根据和坐标变换相同的公式来变换，这就是説，根据公式

$$(x_1', x_2', x_3')=A(x_1, x_2, x_3)\tag{37}$$

而变换。

这种矢量我們叫做逆变的仿射矢量，而且有时候我們把一般的綫性变换(36)叫做仿射变换。另外，我們又可以如此定义矢量，使得在任一个綫性变换之下它的分量經受一个相应的逆步变换，就是

$$(x_1', x_2', x_3')=V(x_1, x_2, x_3)。\tag{38}$$

这种矢量叫做共变的仿射矢量。

在两种情形下，只要有了一个矢量在任一个坐标系中的分量，那末在由这一坐标系經任意仿射变换后的所有其他坐标系中，我們都可以求出它的分量。我們来举几个这两种矢量的例子。首先，連接空間两点的有向綫段显然是逆变矢量，因为它的在上述意义下的分量(它两个端点坐标之差)显然是根据和坐标变换相同的公式来变换。我們再来举一个逆变矢量的例子。假定点的坐标 (x_1, x_2, x_3) 是某一个参数 t 的函数并且定义速度矢量，它的分量是

$$\left(\frac{dx_1}{dt},\ \frac{dx_2}{dt},\ \frac{dx_3}{dt}\right)。$$

把基本公式(36)对 t 微分，我們立刻看出速度矢量也是逆变矢量。

現在来举共变矢量的例子。考虑空間点的某一个函数 $f(x_1, x_2, x_3)$，并在任一个坐标系下定义一个矢量，称为这个函数的梯度，它由下面的分量决定：

$$\frac{\partial f}{\partial x_1},\ \frac{\partial f}{\partial x_2},\ \frac{\partial f}{\partial x_3}。$$

根据复合函数求微商的法則及公式(36)，我們有：

$$\frac{\partial f}{\partial x_s}=a_{1s}\frac{\partial f}{\partial x_1'}+a_{2s}\frac{\partial f}{\partial x_2'}+a_{3s}\frac{\partial f}{\partial x_3'}\quad (s=1,\ 2,\ 3),$$

这就是說，梯度在坐标系 (x_1, x_2, x_3) 下的分量根据表为 $A^{(*)}$ 的綫性变换被梯度在坐标系 (x_1', x_2', x_3') 下的分量表示出来，因之，在坐标系 (x_1', x_2', x_3') 下的分量就根据表为 $A^{(*)-1}=V$ 的綫性变换被在坐标系 (x_1, x_2, x_3) 下的分量表示出来，这就是說，函数的梯度确实是一个共变矢量。

不难把公式(37)和(38)用新坐标对旧坐标以及旧坐标对新坐标的偏微商来表示。我們要引进一些在矢量論中常用的記号，它們和以前的記号有些不同。对于逆变矢量的分量我們把指标写在上面，对于共变矢量写在下面。按照这个規則坐标的指标也写在上面。

变换(36)的系数按照下面的方法可以表成偏微商的形式：

$$a_{ik}=\frac{\partial x'^{(i)}}{\partial x^{(k)}}。\tag{39}$$

逆步矩陣 V 的元素是：

$$V_{ik}=\frac{A_{ik}}{D(A)},$$

矩陣 $(A^{-1})^{(*)}$ 有相同的元素，这就是說，

$$A^{(*)-1}=(A^{-1})^{(*)},$$

也就是，可以先变为逆矩陣，然后再把行列互换。在变到逆矩陣时，系数 c_{ik} 是 $\frac{\partial x^{(i)}}{\partial x'^{(k)}}$，轉置之后，对于矩陣 V 的元素我們就得到表达式：

$$V_{ik}=\frac{\partial x^{(k)}}{\partial x'^{(i)}}。\tag{40}$$

設 $u^{(s)}$ 是逆变矢量在坐标 $x^{(k)}$ 下的分量，$u'^{(s)}$ 是在坐标 $x'^{(s)}$ 下的分量。按照定义我們有：

$$u'^{(i)}=\sum_{s=1}^{3}\frac{\partial x'^{(i)}}{\partial x^{(s)}}u^{(s)}\qquad (i=1,\ 2,\ 3)。\tag{41}$$

同样地对于共变矢量按照定义可得：

$$u_i'=\sum_{s=1}^{3}\frac{\partial x^{(s)}}{\partial x'^{(i)}}u_s\qquad (i=1,\ 2,\ 3)。\tag{42}$$

我們要注意，我們不但在坐标的綫性变换时可以用这个确定矢量的分量的公式，就是在更广的变换，一組坐标被另一組用任意的，一般是非綫性的函数表示时，也可以用这个公式。

我們再來指出定义共变矢量的另一个方法，而逆变矢量仍旧定义为这样的矢量，就是它的分量按照和坐标相同的公式来变换。于是，假設我們有一个逆变矢量 $u^{(s)}$ 和一个共变矢量 v_s。

做乘积的和：

$$u^{(1)}v_1+u^{(2)}v_2+u^{(3)}v_3。\tag{43}$$

不难看出，如果 $u^{(s)}$ 和 v_s 分别按照公式(41)和(42)来变的話，这个和是保持不变的，或如平常所說的，它是一个純量。

事实上，利用复合函数求微商的法則我們立刻就有：

$$\sum_{s=1}^{3}u'^{(s)}v'_s=\sum_{s=1}^{3}\left[\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial x'^{(s)}}{\partial x^{(k)}}u^{(k)}\right]\left[\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial x^{(l)}}{\partial x'^{(s)}}v_l\right]=u^{(1)}v_1+u^{(2)}v_2+u^{(3)}v_3。$$

因此，按照上面所說的办法定义了逆变矢量之后，我們就可以从保持表达式(43)不变这个要求来定义共变矢量的变化規則。如果把上一节所做的計算再逐字地做一遍，我們就得出，在表达式(43)不变性的假定下，分量 v_s 所經受的綫性变换必須是分量 $u^{(s)}$ 所經受的变换的逆步变换。我們留給讀者去証明，在任意的坐标变换下（不仅是綫性的），速度矢量总是逆变矢量，而函数的梯度总是共变矢量。

最后，关于逆变矢量和共变矢量之間的差异我們指出一件事实，在上面它們的差异只是純形式地用从一个坐标系到另一个坐标系的轉换公式来定义的。假設 $\boldsymbol{x}$ 是一个給定了长度和方向的矢量。在有了基本单位矢量之后，我們按公式(28)作这个矢量的分量。現在我們称这些分量为逆变分量，并把公式(28)写成：

$$\boldsymbol{x}=x^{(1)}\boldsymbol{i}+x^{(2)}\boldsymbol{j}+x^{(3)}\boldsymbol{k}。\tag{44}$$

矢量 $\boldsymbol{x}$ 在单位矢量 $\boldsymbol{i}$ 上的直角投影的大小再乘上 $\boldsymbol{i}$ 的长度我們叫做 $\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{i}$ 上的共变分量，对其余两个单位矢量我們同样地定义。这样一来，对每一个单位矢量組我們都有三个共变分量 (x_1, x_2, x_3)。可以証明，在由一个坐标系变到另一个坐标系时它們象共变矢量的分量一样地变。事实上，我們可以証明，不过不打算在这里証明，在这个情形下表达式

$$x^{(1)}x_1+x^{(2)}x_2+x^{(3)}x_3$$

給出矢量 $\boldsymbol{x}$ 长度的平方，因而在单位矢量变换时是不变的。

23．張量的概念 現在我們来討論矢量概念的一个推广，这里开始时只考虑坐标的綫性变换。假設在某一个坐标系中給出了九个数：

$$b_{ik}\quad(i, k=1, 2, 3)。$$

作下面这样子的表达式：

$$\sum_{i,k=1}^{3} b_{ik} u^{(i)} v^{(k)}, \tag{45}$$

这里 $u^{(i)}$ 和 $v^{(k)}$ 是两个逆变矢量的分量。在轉换到一个新的坐标系之后，在表达式(45)中我們可以以新的分量 $u'^{(i)}$ 和 $v'^{(k)}$ 来表示 $u^{(i)}$ 和 $v^{(k)}$，这样一来，把表达式(45)就变为：

$$\sum_{i,k=1}^{3} b_{ik} u^{(i)} v^{(k)} = \sum_{i,k=1}^{3} b'_{ik} u'^{(i)} v'^{(k)}。 \tag{46}$$

因此在新的坐标系中我們就有元素为 b'_{ik} 的九个数的表。这样一个根据表达式(45)的不变性要求在任意坐标系中所定义的表叫做一个二級共变張量。同样地，取两个共变矢量 u_i 和 v_k 并作表达式

$$\sum_{i,k=1}^{3} b^{(i,k)} u_i v_k, \tag{47}$$

在某一个坐标系中給出九个数的表 $b^{(i,k)}$，我們根据表达式(47)不变性的要求可得出任意坐标系中九个数的表。这就給出所謂二級逆变張量。最后，取一个逆变矢量 $u^{(i)}$ 和一个共变矢量 v_k 并作表达式

$$\sum_{i,k=1}^{3} b_i^{(k)} u^{(i)} v_k, \tag{48}$$

我們用同样的方法可得到二級混合張量的概念。

現在我們来指出，在有了坐标的綫性变换(36)的系数之后，如何得出用一个張量在旧坐标系中的分量来表示它在新坐标系中的分量的公式。首先討論二級共变張量的情形。逆变矢量在旧坐标系中的分量 $u^{(i)}$ 和 $v^{(k)}$ 是按照表为 A^{-1} 的綫性变换而被它在新坐标系中的分量 $u'^{(i)}$ 和 $v'^{(k)}$ 所表示。以 $\{A^{-1}\}_{ik}$ 表这个表的元素，我們就有：

$$u^{(i)} = \sum_{k=1}^{3} \{A^{-1}\}_{ik} u'^{(k)}; \quad v^{(i)} = \sum_{k=1}^{3} \{A^{-1}\}_{ik} v'^{(k)}。$$

代入表达式(45)并決定乘积 $u'^{(i)} v'^{(k)}$ 前的系数，我們就得到張量在新坐标系中的分量 b'_{ik} 表达式：

$$b'_{ik} = \sum_{p,q=1}^{3} b_{pq} \{A^{-1}\}_{pi} \{A^{-1}\}_{qk}。 \tag{49}$$

对于二級逆变張量的情形，同样地，我們把共变矢量的分量 u_i 和 v_k 以它們的新分量表示。根据共变矢量的定义，u'_i 是按照表 $A^{(*)-1}$ 由 u_i 表示，因而 u_i 按照表 $A^{(*)}$ 由 u'_i 表示，它是 A 的轉置，v_i 也一样，这就是説

$$u_i = \sum_{k=1}^{3} \{A\}_{ki} u'_k; \quad v_i = \sum_{k=1}^{3} \{A\}_{ki} v'_k。$$

代入表达式(47)，即得二級逆变張量分量变换的公式：

$$b'^{(i,k)} = \sum_{p,q=1}^{3} b^{(p,q)} \{A\}_{ip} \{A\}_{kq}。 \tag{50}$$

相同地，对于二級混合張量的分量我們有下面的变换公式：

$$b_i'^{(k)} = \sum_{p,q=1}^{3} b_p^{(q)} \{A^{-1}\}_{pi} \{A\}_{kq}。 \tag{51}$$

如果我們用偏微商

$$\frac{\partial x'^{(i)}}{\partial x^{(k)}} \quad 和 \quad \frac{\partial x^{(i)}}{\partial x'^{(k)}}$$

来表示綫性变换的系数并把它們代入以上的公式中去，我們就得到在任意的坐标变换下二級張量的变换公式。完全类似地可以定义高于二級的張量的概念，不过我們不打算在这里討論。

以前我們一直在討論在某一个坐标系下表示三維空間的綫性变换的表。假設这个表是

$$B,$$

并且假定我們按公式

$$(y_1, y_2, y_3) = A(x_1, x_2, x_3)$$

作了一个坐标的仿射变换，这里 A 是一个行列式不为 0 的表。以前已經証明过，在新的坐标系中我們的空間变换的表是

$$ABA^{-1}。$$

不难看出，这样一个表的变换和上面所說的二級混合張量的变换是一致的。事实上，应用表相乘的法則，我們就得到下面的公式

$$\{BA^{-1}\}_{qi} = \sum_{p=1}^{3} \{B\}_{qp} \{A^{-1}\}_{pi},$$

进一步得出

$$\{A(BA^{-1})\}_{ki} = \sum_{q=1}^{3} \{A\}_{kq} \{BA^{-1}\}_{qi} = \sum_{p,q=1}^{3} \{B\}_{qp} \{A^{-1}\}_{pi} \{A\}_{kq}。$$

如果以 $b_k^{(i)}$ 来代替 $\{B\}_{ik}$，我們所得的正好就是公式 (51)。因此，空間綫性变换的表是一个二級混合張量。

我們再来举出一些特殊形式的張量。假定共变張量在某一个坐标系中有下面的性质，

$$b_{ik} = b_{ki} \qquad (i, k = 1, 2, 3)。 \tag{52}$$

不难看出，在任意其他的坐标系中它也有这个性质。事实上，按照(49)：

$$b'_{ki} = \sum_{p,q=1}^{3} b_{pq} \{A^{-1}\}_{pk} \{A^{-1}\}_{qi}$$

或者根据(52)

$$b'_{ki} = \sum_{p,q=1}^{3} b_{pq} \{A^{-1}\}_{pk} \{A^{-1}\}_{qi}$$

或者，改变求和的指标：

$$b'_{ki} = \sum_{p,q=1}^{3} b_{pq} \{A^{-1}\}_{qk} \{A^{-1}\}_{pi},$$

由此立即看出，b'_{ki} 确实等于 b'_{ik}。这样的張量叫做对称共变張量。对称逆变張量的定义是完全一样的。同样地，如果在某一个坐标系中 $b_{ik}=-b_{ki}$ 或者 $b^{(i,k)}=-b^{(k,i)}$，那么在任意其他的坐标系中也一定这样，这样的張量叫做反对称的。对于混合張量这种情况是不成立的，例如，关系 $b_i^{(k)}=b_k^{(i)}$ 在坐标变换下不是不变的。现在我們轉入某一些特殊張量的討論。

24．仿射正交張量的例子 在下面的例子里我們把坐标变换限制为只是我們在[20]中所討論的那一种，它們是对应于从一个笛卡尔坐标系到另一个的轉换。这种变换通常叫做三維空間的正交变换。我們知道，对于它們逆步变换 $A^{(*)-1}$ 和 A 是一样的，因之共变張量和逆变張量的差别消失了。对于这样的坐标变换显然地我們就只有一个二級張量的概念。如果我們和以前一样，用 $\{A\}_{ik}$ 来表示坐标正交变换的系数，对于二級張量的变换我們就有下面的公式：

$$b'_{ik}=\sum_{p,q=1}^{3} b_{pq}\{A\}_{ip}\{A\}_{kq}, \tag{53}$$

它从上节的公式可以直接得到。我們把表 $\|b_{ik}\|$ 的每一列的元素看作某一个矢量的分量。这样一来我們就有了三个矢量

$$\boldsymbol{b}^{(1)}(b_{11},b_{21},b_{31});\quad \boldsymbol{b}^{(2)}(b_{12},b_{22},b_{32});\quad \boldsymbol{b}^{(3)}(b_{13},b_{23},b_{33})。$$

我們説，其中的第一个对应于軸 X_1，第二个对应于軸 X_2，第三个对应于轴 X_3。现在按照下面的公式相应于任一个方向 (n) 作一矢量 $b^{(n)}$

$$\boldsymbol{b}^{(n)}=\cos(n,x_1)\boldsymbol{b}^{(1)}+\cos(n,x_2)\boldsymbol{b}^{(2)}+\cos(n,x_3)\boldsymbol{b}^{(3)}。 \tag{54}$$

现在我們任取一个笛卡尔坐标系 (x'_1,x'_2,x'_3) 来代替以前的 (x_1,x_2,x_3)，并且相应于新坐标軸的方向我們按照公式(54)作矢量

$$\boldsymbol{b}'^{(k)}=\cos(x'_k,x_1)\boldsymbol{b}^{(1)}+\cos(x'_k,x_2)\boldsymbol{b}^{(2)}+\cos(x'_k,x_3)\boldsymbol{b}^{(3)}。 \tag{55}$$

如果考虑这些矢量在新坐标軸 x'_1,x'_2,x'_3 上的投影，和表 $\|b_{ik}\|$ 相似，我們就有一九个数的表 $\|b'_{ik}\|$。我們来証明，这个新表的元素恰好是按照二級張量分量变换的公式被元素 b_{ik} 所表示。事实上，譬如我們来考虑元素 b'_{12}。根据定义，它是矢量 $\boldsymbol{b}'^{(2)}$ 在新軸 x'_1 上的分量。公式(55)給出：

$$\boldsymbol{b}'^{(2)}=\cos(x'_2,x_1)\boldsymbol{b}^{(1)}+\cos(x'_2,x_2)\boldsymbol{b}^{(2)}+\cos(x'_2,x_3)\boldsymbol{b}^{(3)}, \tag{56}$$

从这里看出，$\boldsymbol{b}'^{(2)}$ 是矢量 $\boldsymbol{b}^{(i)}$ 的綫性函数，因之，为了求 b'_{12}，只需要在公式(56)的右边把矢量 $\boldsymbol{b}^{(i)}$ 分别换成它們在軸 x'_1 上的投影就行了，这就是說，把这些矢量换成下面的表达式：

$$\boldsymbol{b}^{(i)} \text{ 换成 } b_{1i}\cos(x'_1,x_1)+b_{2i}\cos(x'_1,x_2)+b_{3i}\cos(x'_1,x_3)\quad (i=1,2,3)。$$

此外，我們注意，根据表(2)：

$$\cos(x'_i,x_k)=a_{ik}=\{A\}_{ik}。$$

在公式(56)的右边用这些表达式代替上面提到的矢量，即得：

$$b'_{12}=\sum_{p,q=1}^{3} b_{pq}\{A\}_{1p}\{A\}_{2q},$$

这个正好和公式(53)一样。因此我們可以得出結論，如果对于三个互相垂直的方向我們确定了三个矢量 $\boldsymbol{b}^{(1)}$, $\boldsymbol{b}^{(2)}$, $\boldsymbol{b}^{(3)}$，并且按照公式(54)对于任意的方向(n)我們定义一个矢量，那么給出矢量 $b'^{(k)}(k=1, 2, 3)$ 在軸 $x'^{(k)}$ 上投影的九个数的表就在任意一个笛卡尔坐标系中定义一个二級仿射正交張量，这就是說，对于所有可能的正交变换定义了一个二級張量。

我們要注意，当我們說 $\boldsymbol{b}^{(1)}$ 对应于某一个軸 x_1 的方向，这并不意謂着 $\boldsymbol{b}^{(1)}$ 和軸 x_1 必須有相同的方向。重要的只是公式(54)，它使每一个方向(n)都有一个矢量 $\boldsymbol{b}^{(n)}$ 与之对应，一般說来，$\boldsymbol{b}^{(n)}$ 的方向和(n)是不同的。

現在我們来举两个仿射正交張量的例子。第一个是彈性学中所熟知的張力張量。我們来考慮一个变形了的彈性体，过它的一个固定点 M 作一个无穷小的面积 $d\sigma$，法綫的方向是(n)。在彈性学中我們知道，由法綫方向定义的那一面的彈性介质在面积 $d\sigma$ 上的作用等于某一个与法綫方向(n)有关的矢量 $\boldsymbol{b}^{(n)}$ 和面积 $d\sigma$ 的数值的乘积。从彈性体中划出一个无穷小的四面体，由于考慮它的平衡条件，我們就得出公式(54)，由此直接推知，張力是一个二級張量。在任一个笛卡尔坐标系中这个張量将被九个数的表 $\|b_{ik}\|$ 所刻划，并且，如在彈性学中所証明的，这个張量是对称的，即 $b_{ik}=b_{ki}$。換句話說，作用在与軸 x_k 垂直的面积上的張力在軸 x_i 上的投影等于作用在与軸 x_i 垂直的面积上的張力在軸 x_k 上的投影。

我們現在来看張量的另一个例子。考慮某一个矢量場 $\boldsymbol{C}(M)$。如果取了某一个笛卡尔坐标系(x_1, x_2, x_3)并取場(c_1, c_2, c_3)的分量对坐标的微商，那么我們得到下面这九个量的表：

$$\left\|\begin{matrix} \dfrac{\partial c_1}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial c_1}{\partial x_2}, & \dfrac{\partial c_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial c_2}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial c_2}{\partial x_2}, & \dfrac{\partial c_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial c_3}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial c_3}{\partial x_2}, & \dfrac{\partial c_3}{\partial x_3} \end{matrix}\right\|。\tag{57}$$

对于任一方向(n)，我們定义与这个方向对应的矢量微商 $\dfrac{\partial \boldsymbol{C}}{\partial n}$，这样，在表(57)的第 k 列的元素就是对应于軸 x_k 的方向的矢量的分量。对于任一方向(n)我們就有公式[**II**; **108**]：

$$\frac{\partial c_i}{\partial n}=\cos(n, x_1)\frac{\partial c_i}{\partial x_1}+\cos(n, x_2)\frac{\partial c_i}{\partial x_2}+\cos(n, x_3)\frac{\partial c_i}{\partial x_3}\quad (i=1, 2, 3),$$

这就是說，我們所定义的表是一个二級張量。这个張量一般說来既不是对称的，也不是反对称的。不过，如果我們把两个表的和了解为相当元素的相加，那么不难把它表

成一个对称的和一个反对称的張量之和。

首先我們来作一些一般性的討論。由公式(53)的綫性可以推知，如果 $\|b_{ik}\|$ 和 $\|c_{ik}\|$ 是两个張量的話，那么和 $\|b_{ik}+c_{ik}\|$ 也是張量。并且，这个公式在指标交换之后仍旧是成立的，即：

$$b'_{ki}=\sum_{p,q=1}^{3} b_{qp}\{A\}_{ip}\{A\}_{kq},$$

这就是說，如果某一个对所有的坐标系定义的表是一个張量，那么这个表的轉置也是張量。現在假定我們有了某一个張量 $\|b_{ik}\|$。

我們可以把它表成和的形式：

$$\|b_{ik}\|=\left\|\frac{b_{ik}+b_{ki}}{2}\right\|+\left\|\frac{b_{ik}-b_{ki}}{2}\right\|。$$

第一部份显然是一个对称張量，而第二部份是反对称的。

把这种分解应用到表(57)所定义的張量，我們得到它的对称的部份是：

$$\left\|\begin{matrix} \frac{\partial c_1}{\partial x_1}, & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_1}{\partial x_2}+\frac{\partial c_2}{\partial x_1}\right), & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_1}{\partial x_3}+\frac{\partial c_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_1}{\partial x_2}+\frac{\partial c_2}{\partial x_1}\right), & \frac{\partial c_2}{\partial x_2}, & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_2}{\partial x_3}+\frac{\partial c_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_1}{\partial x_3}+\frac{\partial c_3}{\partial x_1}\right), & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_2}{\partial x_3}+\frac{\partial c_3}{\partial x_2}\right), & \frac{\partial c_3}{\partial x_3} \end{matrix}\right\|。 \tag{58}$$

如果整个的介质有一个变形而 MC 是位移矢量，这就是說，介质的点 M 按这个矢量移动，那么表(58)就是所謂的变形張量。这个張量的反对称部份是：

$$\left\|\begin{matrix} 0, & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_1}{\partial x_2}-\frac{\partial c_2}{\partial x_1}\right), & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_1}{\partial x_3}-\frac{\partial c_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_2}{\partial x_1}-\frac{\partial c_1}{\partial x_2}\right), & 0, & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_2}{\partial x_3}-\frac{\partial c_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_3}{\partial x_1}-\frac{\partial c_1}{\partial x_3}\right), & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_3}{\partial x_2}-\frac{\partial c_2}{\partial x_3}\right), & 0 \end{matrix}\right\|。 \tag{59}$$

以前我們对于綫性齐次变形的特殊情形已經做过張量的分解[II; 113]并且看到，在那个情形下反对称部份相应于空間作为一个整体(沒有变形)繞一根軸的轉动。

25. n 維复空間的情形 現在我們轉到 n 維空間的一般情形。以前我們已經讲过[12] n 个数，实数或者复数的叙列就是这样一个空間中的矢量。

$$\boldsymbol{x}(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n),$$

其中这些数叫做矢量 $\boldsymbol{x}$ 的分量。这里我們是假定，这个空間是取

下面这一組基本单位矢量：

$$\boldsymbol{a}^{(1)}(1,\ 0,\ \cdots,\ 0);\ \boldsymbol{a}^{(2)}(0,\ 1,\ \cdots,\ 0);\ \cdots;\ \boldsymbol{a}^{(n)}(0,\ 0,\ \cdots,\ 1),$$

使得

$$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{a}^{(1)}+x_2\boldsymbol{a}^{(2)}+\cdots+x_n\boldsymbol{a}^{(n)}。\tag{60}$$

矢量相等的条件以及它們簡单的运算我們在[12]中已定义过了。

从矢量 $\boldsymbol{x}(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 到矢量 $\boldsymbol{y}(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)$ 按公式：

$$y_i=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\tag{61}$$

的一个轉換叫做 n 維空間的一个綫性变换，或者用符号表示为

$$\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x},\tag{62}$$

这里 A 是变换的表 $\|a_{ik}\|_1^n$。如果它的行列式 $D(A)$ 不为零，那么变换 (62) 叫做非奇异的变换，而矩陣 A 叫做非奇异的矩陣(表)。在这个情形下，对 x_i 解方程 (61)，我們就得到与(61)或者(62)相逆的变换：

$$\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{y},\tag{63}$$

这里表 A^{-1} 的元素是

$$\{A^{-1}\}_{ik}=\frac{A_{ki}}{D(A)},\tag{64}$$

其中 $D(A)$ 是表 A 的行列式，A_{ik} 是元素 a_{ik} 的代数余子式。

再者，与以前[21]相仿，我們定义两个变换的乘积，两个变换

$$\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{z}=B\boldsymbol{y}$$

的連續施行相当于一个綫性变换

$$\boldsymbol{z}=BA\boldsymbol{x},$$

它就叫做变换 A 和 B 的乘积，它的表按下面的公式决定：

$$\{BA\}_{ik}=\sum_{s=1}^{n}\{B\}_{is}\{A\}_{sk}。\tag{65}$$

这个乘积一般說来是与因子的次序有关的，也就是說，除去特殊情形，一般地我們有：

$$BA\neq AB。$$

不难把乘积的定义推广到任意多个因子的情形，并且結合律成立，就是說，因子可以任意結合：

$$(CB)A=C(BA)。\tag{66}$$

逆变換适合下列关系：

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I;\quad (A^{-1})^{-1}=A,\tag{67}$$

这里我們用符号 I 代表所謂单位矩陣，在它里面主对角綫上的元素等于1，而其余的元素全是零，与这个矩陣对应的是恒等变換

$$y_i=x_i\quad (i=1, 2, \cdots, n)。$$

和以前一样，我們定义 n 阶的对角矩陣：

$$[k_1, k_2, \cdots, k_n]=\begin{Vmatrix} k_1, & 0, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & k_2, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & 0, & k_3, & \cdots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & \cdots, & k_n \end{Vmatrix}。\tag{68}$$

与它对应的变換是：

$$y_i=k_ix_i\qquad (i=1, 2, \cdots, n)。$$

对角矩陣的乘积与因子的次序无关，它由下面的公式决定：

$$[k_1, k_2, \cdots, k_n][l_1, l_2, \cdots, l_n]=[l_1, l_2, \cdots, l_n][k_1, k_2, \cdots, k_n]=$$
$$=[k_1l_1, k_2l_2, \cdots, k_nl_n]。$$

在特殊情形 $k_1=k_2=\cdots=k_n=k$ 下我們得到矩陣

$$[k, k, \cdots, k]=\begin{Vmatrix} k, & 0, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & k, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & 0, & k, & \cdots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & \cdots, & k \end{Vmatrix},\tag{69}$$

它相当于把矢量的所有分量全用数 k 来乘。根据以前所說的，我們将把矩陣(69)就簡单地看作是数 k，这就是說，把数 k 看作矩陣

的特殊情形。利用公式 (65) 不难看出，数 k，把它看作矩陣 (69)，与任意矩陣的乘积是与因子的次序无关的，并且就相当于把矩陣 A 所有的元素全用数 k 来乘：

$$\{(k, k, \cdots, k)A\}_{ik} = \{kA\}_{ik} = k\{A\}_{ik}。 \tag{70}$$

現在假設我們取作基本单位矢量的不是上面所說的矢量 $\boldsymbol{a}^{(k)}$，而是新的矢量 $\boldsymbol{b}^{(k)}$，它們按下面的公式被 $\boldsymbol{a}^{(k)}$ 表示：

$$\left.\begin{array}{l}
\boldsymbol{b}^{(1)} = t_{11}\boldsymbol{a}^{(1)} + t_{12}\boldsymbol{a}^{(2)} + \cdots + t_{1n}\boldsymbol{a}^{(n)} \\
\boldsymbol{b}^{(2)} = t_{21}\boldsymbol{a}^{(1)} + t_{22}\boldsymbol{a}^{(2)} + \cdots + t_{2n}\boldsymbol{a}^{(n)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\boldsymbol{b}^{(n)} = t_{n1}\boldsymbol{a}^{(1)} + t_{n2}\boldsymbol{a}^{(2)} + \cdots + t_{nn}\boldsymbol{a}^{(n)},
\end{array}\right\} \tag{71}$$

而且由元素 t_{ik} 組成的行列式不为零。这样，矢量 $\boldsymbol{a}^{(k)}$ 反过来也可以被矢量 $\boldsymbol{b}^{(k)}$ 綫性表示，并且矢量 $\boldsymbol{a}^{(k)}$ 的每一个綫性組合都同时是矢量 $\boldsymbol{b}^{(k)}$ 的綫性組合，反过来也对。换句話說，作为基本单位矢量，矢量 $\boldsymbol{b}^{(k)}$ 和矢量 $\boldsymbol{a}^{(k)}$ 生成同一个空間。如果某一个矢量 x 在单位矢量 $\boldsymbol{a}^{(k)}$ 所决定的坐标系中的分量是 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，那么在单位矢量 $\boldsymbol{b}^{(k)}$ 所决定的坐标系中它就要有另外的分量 $(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)$，它們由前者按照变换 (71) 的逆步綫性变换表示，这个可以写成：

$$(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n) = T^{(*)-1}(x_1, x_2, \cdots, x_n), \tag{72}$$

这里表 $T^{(*)}$ 是对应于变换 (71) 的表 T 的轉置。

如果我們有一个空間的变换，它在前一个坐标系中由公式 (62) 表示，那么在新的坐标系中这同一个变換就由下面的公式表示：

$$\boldsymbol{y}' = UAU^{-1}\boldsymbol{x}', \tag{73}$$

这里
$$U = T^{(*)-1}。$$
表
$$UAU^{-1}$$
称为和表 A 是相似的。

在以上的討論中基本的概念是矢量和矩陣的概念。我們注

意，有时候可以把矢量 $x(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 看成矩陣，这个矩陣的某一列，究竟是那一列沒有关系，是数 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，而其余的元素全是零。譬如我們假定把矢量的分量放在第一列。这样一来，我們的矢量就可以表成矩陣的形式：

$$\left\|\begin{matrix} x_1, & 0, & \cdots, & 0 \\ x_2, & 0, & \cdots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n, & 0, & \cdots, & 0 \end{matrix}\right\|。$$

有时候，这样的只有一列含有不为零的元素的矩陣，用下面的符号来表示：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left\|\begin{matrix} x_1, & 0, & \cdots, & 0 \\ x_2, & 0, & \cdots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n, & 0, & \cdots, & 0 \end{matrix}\right\|。\tag{74}$$

現在我們来証明，綫性变换 (62) 可以写成换矩 (74) 和矩陣 A 的乘积的形式。事实上，把矩陣 (74) 用矩陣 A 按規則 (65) 来乘并注意到矩陣 (74) 只有第一列的元素不为零，我們就得到乘积的矩陣，其中也只有第一列的元素不为零，并且不难看出这些元素就是：

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n,$$

这就是說，它們正好就給出綫性变换 (62)。因此我們可以把这个变换写成形式：

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \tag{75}$$

式中右边是两个矩陣的乘积。

在这一节的最后，我們再指出一些 n 維矢量空間的矢量的运算所滿足的一般法則

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x};\quad (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})。$$

如果 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 是任意两个矢量，那么分量为 (y_k-x_k) 的矢量 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}$ 是适合条件 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{y}$ 的唯一的一个矢量。

設 a 和 b 是任意的数。我們有

$$(a+b)\boldsymbol{x}=a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{x};\quad a(b\boldsymbol{x})=(ab)\boldsymbol{x};$$
$$a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=a\boldsymbol{x}+a\boldsymbol{y}。$$

对于 1 我們有 $1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$，以及 $0\boldsymbol{x}=0$，这里在右边的 0 是代表全部分量是零的矢量。

26. 矩陣計算的基础　在前一节用到的公式中，矩陣是作为一个新的符号被引入的，对于它我們可以施行一些和在平常的数上所施行的运算相似的运算。这一点使我們很自然地想到要建立一个新的代数，它适用于矩陣这种符号。換句話說，我們要把矩陣看作数的一种新的形式，看作某一种超复数。以前我們利用两个实数建立了一种新的数，就是形式为 $a+bi$ 的复数，和这个一样，現在我們利用 n^2 个复数 a_{ik}，把它們排成一个方的表，来建立一种新的数的概念——矩陣。不过我們必須指出它們之間重大的差別。这就是，我們知道，对于表示复数的字母我們可以施行所有代数中对实数說来为大家所熟知的运算。对于矩陣我們得到一个代数，它和我們熟悉的复数的代数有重大的差別。造成这个差別的主要因素是乘法的非交換性，这就是說，乘法的結果依賴于因子的次序。現在我們来确立矩陣代数的一些基本規則，而且在許多方面我們是以前面把矩陣看作綫性变換的表所得到的一些結果作为指导的。

在以下各处，如果不特別声明，我們将认为所有的矩陣都有相同的阶 n。如果 A 是这样一个矩陣，那么和以前一样，我們用 $\{A\}_{ik}$ 来表示它的元素。

两个矩陣 A 和 B 认为是相等的当且仅当

$$\{A\}_{ik}=\{B\}_{ik}\quad (i,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n), \tag{76}$$

即，它們相当的元素全相等。

矩陣的加法按下面的公式定义：

$$\{A+B\}_{ik}=\{A\}_{ik}+\{B\}_{ik}, \tag{77}$$

即，归結于相当元素的相加。

乘积按下面的公式定义：

$$\{BA\}_{ik}=\sum_{s=1}^{n}\{B\}_{is}\{A\}_{sk}。 \tag{78}$$

如以前知道的，一般地，

$$BA\neq AB,$$

但是結合律成立[21]：

$$(CB)A=C(BA)。 \tag{79}$$

乘积的行列式等于相乘矩陣的行列式的乘积

$$D(BA)=D(B)D(A)。 \tag{80}$$

分配律也显然成立

$$(A+B)C=AC+BC\quad 和\quad C(A+B)=CA+CB。 \tag{81}$$

我們再来指出乘法的一个特点，就是，虽然所有的因子全不为零，矩陣的乘积可能等于零，这就是說，等于一个所有元素全为零的矩陣。我們举两个相同的二阶矩陣的乘积作为例子

$$\begin{Vmatrix}0, & 0\\ 1, & 0\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}0, & 0\\ 1, & 0\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0, & 0\\ 0, & 0\end{Vmatrix}。$$

完全和上一节一样，如果 A 是非奇异矩陣，这就是說，如果 $D(A)\neq 0$，我們引入逆矩陣 A^{-1} 的概念。如果 $C=BA$，R_A，R_B 和 R_C 分别是矩陣 A，B 和 C 的秩，那么我們知道，$R_C\leqslant R_A$[7]。如果 B 是非奇异的矩陣，那么 $A=B^{-1}C$，和以上一样我們又可以断定 $R_A\leqslant R_C$，因之 $R_C=R_A$，这就是說，在矩陣 A 被一个非奇异

矩陣 B 乘(右边或者左边)的时候，它的秩不变。对于单位矩陣 I 关系式

$$BI=IB=B \tag{82}$$

成立，式中 B 是任意的矩陣。

不难看出，矩陣 A^{-1} 是方程

$$AX=I \text{ 和 } XA=I \tag{83}$$

的唯一的解，其中 I 是单位矩陣。实际上，譬如在第一个方程的左边乘上 A^{-1} 并且应用(79)和(67)，我們就得到 $X=A^{-1}$，对第二个方程也一样。我們指出，如果 $D(A)=0$，那么方程(83)一定沒有解，这就是說，矩陣 A 沒有逆。事实上，作为方程(83)的推論我們有：

$$D(A)D(X)=1,$$

这个和条件 $D(A)=0$ 相違背。

我們还可以回想一下前一节所引入的对角矩陣的概念，以及每一个数 k 都可以看作是矩陣的特殊情形。而且不难引入关于矩陣的正整数方次的概念

$$A^p=A\cdot A\cdots A。$$

矩陣的負整数方次作为逆矩陣的正整数方次引入，这就是說，

$$A^{-p}=(A^{-1})^p。 \tag{84}$$

显然地，我們有：

$$A^{-p}=(A^p)^{-1}, \text{ 即 } A^{-p}A^p=A^pA^{-p}=I。 \tag{85}$$

两个矩陣的商的符号

$$\frac{A}{B}$$

沒有确定的意义。我們可以有两种解释——或者作为乘积 AB^{-1}，或者作为乘积 $B^{-1}A$，而且这两个乘积一般說来是不同的，只有在它們相等的特殊情形下，商的符号才有确定的意义。

其次，关于相似矩陣的概念也是一个基本的概念，它在上一节已經引入。我們指出一些公式，它們是很容易被証明的：

$$(CBA)^{-1}=A^{-1}B^{-1}C^{-1}, \tag{86}$$

$$CBAC^{-1}=(CBC^{-1})(CAC^{-1})。 \tag{87}$$

如果用 $A^{(*)}$ 表示矩陣 A 的轉置矩陣，那么下面的公式也成立：

$$(CBA)^{(*)}=A^{(*)}B^{(*)}C^{(*)}, \tag{88}$$

它利用乘法的定义是不难驗算的。我們再引进两个新的符号。我們用 $\overline{A}$ 来代表一个矩陣，它的元素是矩陣 A 的元素的共軛数，即

$$\{\overline{A}\}_{ik}=\overline{\{A\}_{ik}}, \tag{89}$$

而且这里和平常一样，我們用符号 $\overline{\alpha}$ 来表示复数 α 的共軛数。最后，我們用 $\widetilde{A}$ 来代表一个矩陣，它是由矩陣 A 把行列互换再把元素换成共軛数而得出的，即

$$\{\widetilde{A}\}_{ik}=\overline{\{A\}_{ki}}。 \tag{90}$$

矩陣 $\widetilde{A}$ 有时称为和矩陣 A 是共軛的或者是厄密特共軛的（厄密特是十九世紀后半叶的一个法国数学家）。不难核算公式

$$\widetilde{CBA}=\widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{C}。 \tag{91}$$

不难核算下面这个簡单的公式：

$$(A^{(*)})^{-1}=A^{-1(*)},$$

即，矩陣求逆的符号和轉置的符号可以互换次序，这一点我們在以前[20]已經提到过。

我們再指出一个以后有用的公式。由关系式(67)直接推出

$$D(A)D(A^{-1})=1,$$

即

$$D(A^{-1})=D(A)^{-1}。 \tag{92}$$

换句話說，逆矩陣的行列式等于原来矩陣的行列式的逆。

我們再引进准对角矩陣的概念，它是对角矩陣的推广。我们以一个特殊的情形来闡明这个概念。假設有一个七阶矩陣：

$$\begin{Vmatrix} b_{11}, & b_{12}, & b_{13}, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ b_{21}, & b_{22}, & b_{23}, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ b_{31}, & b_{32}, & b_{33}, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & c_{11}, & c_{12}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & c_{21}, & c_{22}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & d_{11}, & d_{12} \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & d_{21}, & d_{22} \end{Vmatrix}。$$

我們用 B 代表元素为 b_{ik} 的三阶矩陣，C 和 D 代表元素为 c_{ik} 和 d_{ik} 的二阶矩陣。前面的七阶矩陣就叫做一个結构为 $\{3, 2, 2\}$ 的准对角矩陣并用符号

$$[B, C, D]$$

表示。

一般地假設，一个 n 阶矩陣的由元素 a_{ii} 組成的主对角綫被分成 m 部分，其中第一部分包含前 k_1 个元素，第二部分包含接下去的 k_2 个元素，等等，使 $k_1+k_2+\cdots+k_m=n$。我們可以把前 k_1 个元素看成某一个 k_1 阶矩陣 X_1 的主对角綫；接下去的 k_2 个元素看成某一个 k_2 阶矩陣 X_2 的主对角綫，等等。假定說矩陣 A 所有的不屬于 X_s 这些矩陣的元素全为零。矩陣 A 就叫做結构为 $\{k_1, k_2, \cdots, k_m\}$ 的准对角矩陣并以下面的形式来表示：

$$A=[X_1, X_2, \cdots, X_m]。$$

对于相同結构的矩陣的运算規則就特别簡單。我們將給出相应的一些公式，不过不予証明。它們根据运算的定义可以很簡单地被驗証。对于結构相同的矩陣的加法我們有公式

$$[X_1, X_2, \cdots, X_m]+[Y_1, Y_2, \cdots, Y_m]= \\ =[X_1+Y_1, X_2+Y_2, \cdots, X_m+Y_m], \qquad (93)$$

这里所謂結构相同就是說每一个矩陣 X_s 的阶数都和相当的矩陣 Y_s 的阶数相等。同样地对于乘法和乘方我們有：

$$[X_1, X_2, \cdots, X_m][Y_1, Y_2, \cdots, Y_m] = \\ = [X_1Y_1, X_2Y_2, \cdots, X_mY_m], \tag{94}$$

$$[X_1, X_2, \cdots, X_m]^p = [X_1^p, X_2^p, \cdots, X_m^p], \tag{95}$$

式中 p 是任意的正整数或負整数，而且如果 p 是負整数，当然就必須要求行列式 $D(X_s)$ 全不为零。

矩陣 $[X_1, X_2, \cdots, X_m]$ 用相同結构的矩陣来变换的規則可以表成下式:

$$[Y_1, Y_2, \cdots, Y_m][X_1, X_2, \cdots, X_m][Y_1, Y_2, \cdots, Y_m]^{-1} = \\ = [Y_1X_1Y_1^{-1}, Y_2X_2Y_2^{-1}, \cdots, Y_mX_mY_m^{-1}]。 \tag{96}$$

我們来指出那些被准对角矩陣所引起的綫性变换的几何意义。为了簡单起見我們来考慮上面所举的那个七阶准对角矩陣，它的結构是$\{3, 2, 2\}$。我們来看对应于这个矩陣的綫性变换。如果在原来的矢量$(x_1, \cdots, x_7)$中我們有:

$$x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = 0,$$

那么在变换之后的矢量中显然也有:

$$y_4 = y_5 = y_6 = y_7 = 0,$$

这就是說，由前三个基础单位矢量所生成的子空間中的每一个矢量在变换之后仍然属于这个子空間，并且这个变换就由三阶矩陣 B 决定。对于由下两个单位矢量所生成的子空間以及由最后两个单位矢量所生成的子空間也一样。

在这里我們重提一下，所謂由矢量 $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(l)}$ 所生成的子空間就是指所有的由公式

$$c_1x^{(1)} + c_2x^{(2)} + \cdots + c_lx^{(l)}$$

所定义的矢量的集合，式中 $c_1, c_2, \cdots, c_l$ 是任意常数。

27. 矩陣的特征值与化矩陣成标准形式　相似的矩陣在(76)的意义下当然是不一定相等的，不过从几何的观点来看它們在下面这一方面是等价的，就是，它們可以看作是在不同的坐标系中体

現空間的同一个綫性变换。現在我們来找这一些矩陣的不变量，这就是說，找出这样一些由矩陣的元素組成的表达式，它們对于所有相似的矩陣都有相同的值。有一个不变量是不难做的。这就是矩陣的行列式。事实上，如果 A 是一个矩陣，UAU^{-1} 是它的一个相似的矩陣，而且 U 是任一个行列式不为零的矩陣。由(80)和(92)我們就有：

$$D(UAU^{-1})=D(U)D(A)D(U^{-1})=D(U)D(A)D(U)^{-1}=$$
$$=D(A)。$$

为了建立其他的不变量，我們做某一个参数 λ 的一个 n 次多項式 $\varphi(\lambda)$，它等于把矩陣 A 的所有对角綫上的項全减去参数 λ 所得出的矩陣的行列式，即

$$\varphi(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}-\lambda, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots, & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}, \tag{97}$$

这里 a_{ik} 是矩陣 A 的元素。或者我們可以把它写成：

$$\varphi(\lambda)=D(A-\lambda)=D(A-\lambda I), \tag{98}$$

因为根据以前的約定，λ 或 λI 都是主对角綫上的元素全是 λ 的对角矩陣。用 UAU^{-1} 来代 A 并注意到任何矩陣和数 λ 都是可交换的，因而 $U\lambda U^{-1}=\lambda$，我們就有：

$$D(UAU^{-1}-\lambda)=D[U(A-\lambda)U^{-1}]=D(A-\lambda)$$

从而

$$D(UAU^{-1}-\lambda)=D(A-\lambda)。 \tag{99}$$

这样我們看到，对于矩陣 UAU^{-1} 所做的多項式 (97) 和对于矩陣 A 所做的多項式是一样的。换句話說，多項式(97)所有的系数对于相似的矩陣全是不变量。这个多項式的首項系数很容易看出是等于 $(-1)^n$。我們特別指出它的两个系数，就是常数項和

$(-1)^{n-1}\lambda^{n-1}$ 的系数。第一个显然就是行列式，这个不变量前面已經提过。至于 $(-1)^{n-1}\lambda^{n-1}$ 的系数，利用[5]的結果，我們看出它就等于对角綫上的元素的和。这个和通常叫做矩陣的迹并用下面的符号表示：

$$\mathrm{Sp}(A)=\{A\}_{11}+\{A\}_{22}+\cdots+\{A\}_{nn}=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn},$$

这里 Sp 是德国字 "Spur" 的前两个字母，它的意思俄文是 "след" (迹) (法文是 "trace")。于是，相似的矩陣有相同的行列式和相同的迹。

現在我們写下方程

$$D(A-\lambda)=0, \tag{100}$$

它叫做矩陣 A 的特征方程，而它的根叫做矩陣 A 的特征値或者固有値。根据以上所讲的我們可以說，相似的矩陣有相同的特征値。在以前我們已經看到过形式为(100)的方程。

我們現在提出下面这个問題：是否能够找到一个矩陣 V，以它作相似变换把矩陣 A 变到矩陣 $V^{-1}AV$，使得后面这个矩陣是对角矩陣。从空間綫性变换的观点来看，就是，是否能选擇这样一个坐标系，使得在原来的坐标系下由矩陣 A 所确定的綫性变换在这个新的坐标系下簡单地变成 $y_k=\lambda_k x_k$ 这种形式的变换。应当注意，我們把相似矩陣写成形式 $V^{-1}AV$ 而不是以前的形式 UAU^{-1}，当然，这个沒有什么大关系。

我們可以把我們的条件写成下面的形式：

$$V^{-1}AV=[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n], \tag{101}$$

这里所要求的是矩陣 V 的元素和数 λ_k。把等式两边从左边用 V 相乘，显然可以把这个条件改写成：

$$AV=V[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]。 \tag{102}$$

根据公式(65)我們决定等式两边的元素，并使两边指标同为 i 和 k 的元素相等。这样一来，我們就得到 n^2 个方程：

$$\sum_{s=1}^{n} a_{is}v_{sk}=v_{ik}\lambda_k,$$

其中 a_{ik} 和 v_{ik} 是矩陣 A 和 V 的元素。

固定第二指标 k 并且让 $i=1, 2, \cdots, n$，我們得到 n 个方程，其中只包含矩陣 V 第 k 列的元素 $v_{1k}, v_{2k}, \cdots, v_{nk}$ 和数 λ_k:

$$\sum_{s=1}^{n} a_{is}v_{sk}=v_{ik}\lambda_k \quad (i=1, 2, \cdots, n)。 \tag{103}$$

如果我們把元素 $(v_{1k}, v_{2k}, \cdots, v_{nk})$ 看成是某一个矢量 $\boldsymbol{v}^{(k)}$ 的分量，那么上面的等式就可以写成一个矢量方程:

$$A\boldsymbol{v}^{(k)}=\lambda_k\boldsymbol{v}^{(k)}。 \tag{104}$$

这样一来，我們看到，求一个把矩陣 A 化成对角形式的矩陣 V 的問題就变成了求一个矢量 $\boldsymbol{v}^{(k)}$ 的問題，这个矢量經过由矩陣 A 所决定的綫性变換之后只差一个純量倍数。这个事实是近代量子力学的一个事实的代数縮影，就是海森堡的矩陣力学基本上和史列丁格尔的波动力学是一回事。根据矩陣力学的观点，主要的問題是化一个矩陣(无限的)成对角形式。至于波动力学，其中基本的問題是找这样一个矢量(在无限維空間中)，它經过某一个綫性变換之后只差一个純量倍数。上面的說法我們所以叫做一个代数縮影是因为限制于有限維空間，我們的問題就成了一个純粹代数的問題。在較为复杂的无限維空間的情形中我們就要超出通常代数的范圍而需要用到分析的工具。所有这些問題以后我們将更詳細地說明，并且我們会看到，在所考虑的有限維空間的情形中为了物理上的应用我們把矩陣 A 限制为一种特殊类型(厄密特矩陣，其中 $a_{ki}=\bar{a}_{ik}$)就够了，同时矩陣 U 也必須是一定的类型(U-矩陣，它的定义将在下面給出)。現在我們是考虑任意有限矩陣的一般的問題，并且只引出最后的結果，而不做完全的証明。对于在应用中有兴趣的問題将給以完全的解决。

我們来解方程組(103)或者(104)。把它完全写出来我們就有：

$$\left.\begin{aligned}(a_{11}-\lambda_k)v_{1k}+a_{12}v_{2k}+\cdots+a_{1n}v_{nk}=0\\ a_{21}v_{1k}+(a_{22}-\lambda_k)v_{2k}+\cdots+a_{2n}v_{nk}=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}v_{1k}+a_{n2}v_{2k}+\cdots+(a_{nn}-\lambda_k)v_{nk}=0。\end{aligned}\right\}\qquad(105)$$

为了得到一个不为零的解 $(v_{1k}, \cdots, v_{nk})$，它的充分必要条件是所写的方程組的行列式等于零，这就是說，充分必要条件是 λ_k 为特征方程的一个根。我們只詳細研究这个方程有不同的根的情形。用 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 代表这些根。用第一个根 λ_1 代方程組(105)中的 λ_k，我們就可以得到矩陣 V 第一列的元素，在这里我們不考虑 v_{i1} 究竟有多少种选擇这个問題。我們随便选擇方程組的一个解，只要它不为零就行了。同样地，在方程組(105)的系数中让 $\lambda_k=\lambda_2$，我們就可以决定矩陣 V 的第二列的元素，这样一直到第 n 列。等式(105)和(102)是一回事，为了回到基本的等式(101)，我們只須証明矩陣 V 有逆矩陣 V^{-1}，这就是說，V 的行列式不为零。我們用反証法来証明。假定說它等于零。从[12]中我們知道，这就相当于說在矩陣 V 的列矢量 $\boldsymbol{v}^{(k)}$ 之間有一个綫性关系：

$$C_1\boldsymbol{v}^{(1)}+C_2\boldsymbol{v}^{(2)}+\cdots+C_n\boldsymbol{v}^{(n)}=0,$$

这里系数 C_k 不全为零。在等式两边作 $(n-1)$ 次由矩陣 A 所决定的变換。利用(104)，我們就有 n 个等式：

$$\begin{aligned}C_1\boldsymbol{v}^{(1)}\quad&+C_2\boldsymbol{v}^{(2)}\quad&+\cdots+C_n\boldsymbol{v}^{(n)}\quad&=0\\ \lambda_1C_1\boldsymbol{v}^{(1)}\quad&+\lambda_2C_2\boldsymbol{v}^{(2)}\quad&+\cdots+\lambda_nC_n\boldsymbol{v}^{(n)}\quad&=0\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&&\\ \lambda_1^{n-1}C_1\boldsymbol{v}^{(1)}&+\lambda_2^{n-1}C_2\boldsymbol{v}^{(2)}&+\cdots+\lambda_n^{n-1}C_n\boldsymbol{v}^{(n)}&=0。\end{aligned}$$

注意到矢量 $C_k\boldsymbol{v}^{(k)}$ 不全为零，我們可以断言，这个方程組的行列式必須等于零：

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & \cdots, & 1 \\ \lambda_1, & \lambda_2, & \cdots, & \lambda_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{n-1}, & \lambda_2^{n-1}, & \cdots, & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = 0,$$

这里数 λ_k 根据条件是不同的。不过这个等式与不同数的范德蒙特行列式不为零相抵触。这样,我們就証明了,当矩陣的特征值全不同的时候,我們可以用相似变换把它化成对角形式。在特征值有相同的情形下,矩陣可能不能用相似变換化成对角形式。但在这种情形下矩陣仍可化为一个最簡单的,或所謂标准形式。在矩陣化成对角形式的情形下,这个标准形式是:

$$[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n],$$

这里 λ_k 是矩陣的特征值。对一般的情形我們只叙述結果①。設 $\lambda=a$ 是方程(100)的一个 k 重根。再假設,对在方程(100)左边所有的$(n-1)$阶的表的行列式中,$\lambda=a$ 是一个 k_1 重根,而不高于它,这就是說,所有这些行列式全被 $(\lambda-a)^{k_1}$ 除尽,但是其中至少有一个不被 $(\lambda-a)^{k_1+1}$ 除尽。再假設,所有的 $(n-2)$ 阶的行列式以 $\lambda=a$ 为一 k_2 重根,而不高于它,如此下去,最后,所有的$(n-m)$阶的行列式以 $\lambda=a$ 为一 k_m 重根,而至少有一个 $(n-m-1)$ 阶的行列式当 $\lambda=a$ 时根本不等于零。显然对阶数更低的行列式情况也是如此。可以証明,数 k_s 是遞降的,即

$$k>k_1>k_2>\cdots>k_m,$$

引入下面这些正整数:

$$l_1=k-k_1;\ l_2=k_1-k_2;\ \cdots;\ l_{m+1}=k_m,$$

而且显然有 $$l_1+l_2+\cdots+l_{m+1}=k。$$

二項式: $(\lambda-a)^{l_1};\ (\lambda-a)^{l_2};\ \cdots;\ (\lambda-a)^{l_{m+1}}$

① 它的証明見本卷二分册的附录。

叫做相当于根 $\lambda=a$ 的矩陣 A 的初等因子。因此我們对于矩陣 A 所有的特征値都可以定义初等因子，这样一来，我們就得到初等因子組：

$$(\lambda-\lambda_1)^{\rho_1};\ (\lambda-\lambda_2)^{\rho_2};\ \cdots;\ (\lambda-\lambda_p)^{\rho_p}, \tag{106}$$

这里

$$\rho_1+\rho_2+\cdots+\rho_p=n \tag{107}$$

数 λ_k 之中可能有相同的。

在上面我們看到在相似变换下特征值不变。矩陣的初等因子組也具有同样的性质。現在我們引入一个新的簡单的矩陣 $I_\rho(a)$。这个矩陣的阶数是 ρ，主对角綫上的元素全是 a，在主对角綫下面的斜綫上的元素全是 1，其余的元素是零：

$$I_\rho(a)=\left\|\begin{matrix} a, & 0, & 0, & \cdots, & 0, & 0 \\ 1, & a, & 0, & \cdots, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & a, & \cdots, & 0, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & \cdots, & a, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \cdots, & 1, & a \end{matrix}\right\|。 \tag{108}$$

下面这个結果是关于化矩陣成标准形式的問題的一个主要結果：如果矩陣 A 的初等因子組是(106)，那么存在一个行列式不为零的矩陣 U 使得

$$UAU^{-1}=[I_{\rho_1}(\lambda_1),\ I_{\rho_2}(\lambda_2),\ \cdots,\ I_{\rho_p}(\lambda_p)]。 \tag{109}$$

应当注意，如果已經知道了矩陣 A 全部的特征值，那么求矩陣 U 时只用到一些簡单的代数运算。如果 $\rho=1$，那么 $I_\rho(a)$ 就是数 a。就是在有相同的特征值的情形，也可能所有的初等因子(106)都是单純的，这就是說，有形式：

$$(\lambda-\lambda_1);\ (\lambda-\lambda_2);\ \cdots;\ (\lambda-\lambda_n)。$$

在这个情形准对角矩陣

$$[I_{\rho_1}(\lambda_1),\ I_{\rho_2}(\lambda_2),\ \cdots,\ I_{\rho_p}(\lambda_p)]$$

就簡单地变成对角矩陣 $[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]$，而矩陣就化成了对角形式。

应当指出，在公式(109)中出現的矩陣 U 不是唯一决定的。特别地，如果 d 是矩陣 U 的行列式的値，那么我們可以在公式(109)中把

$$U \text{ 換成 } \frac{1}{\sqrt[n]{d}} U \text{ 以及 } U^{-1} \text{ 換成 } \sqrt[n]{d}\, U^{-1},$$

因此我們可以认为在公式(109)中矩陣 U 的行列式等于1。对于一般的化矩陣成对角形式的問題我們只談到这儿。在第三卷第二部分的附录中我們再回到这个問題。上面已經說过，以下我們将对特殊类型的矩陣詳細討論这个問題。

不难証明，矩陣可以化成对角形式的充分必要条件是在方程組(105)中系数表的秩等于 $n-\mu_k$，这里 μ_k 是在特征方程中根 λ_k 的重数。如果这个条件满足，那么方程組(105)就决定 μ_k 个綫性无关的矢量 $(v_{1k}, v_{2k}, \cdots, v_{nk})$ [**14**]。

最后，应該注意，公式(109)中的矩陣 U 不是唯一决定的。对于一般的化矩陣成对角形式的問題我們只談这一些。上面已經說过，以下将对特殊类型的矩陣的問題作詳細的討論。

28. U 变換和正交变換　在这一节和下一节中我們要用到矢量的数量乘积和模(长度)的概念，这两个概念在[**13**]中已經引入。我們記得，模(长度)的平方是由下面的公式定义的:

$$\|x\|^2 = (x, x) = \sum_{s=1}^{n} |x_s|^2, \tag{110}$$

先

或者，在实分量的情形，是

$$\|x\|^2 = \sum_{s=1}^{n} x_s^2 。$$

这个模的定义是和一定的基础单位矢量，也就是坐标軸的选擇有关的。带有上面这个模的定义的坐标系将叫做正規的，或者

笛卡尔坐标系。除去矢量的长度外我們还用下面的公式定义了两个矢量的数量乘积：

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=x_1\bar{y}_1+x_2\bar{y}_2+\cdots+x_n\bar{y}_n。\tag{111}$$

在实矢量的情形这个公式取比較对称的形式

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n。$$

由(111)推知，如果交換矢量的次序，那么数量乘积的值就变成它的共軛数，即

$$(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x})=\overline{(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})}。\tag{112}$$

如果两个矢量的数量乘积等于零，就称为是垂直的或者是正交的。

在以下，如果不特別声明的話，总是假定我們的討論是在笛卡尔坐标系下。因此，那些相当于从一个笛卡尔坐标系到另一个笛卡尔坐标系轉換的綫性变换就有了特殊的意义。我們知道，每个从一个坐标系到另一个坐标系的轉換都相当于一个分量的綫性变換。假設我們有这样一个变換

$$(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)=U(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n),\tag{113}$$

而且原来的坐标系是笛卡尔坐标系。要使得新的坐标系仍旧是笛卡尔坐标系，它的充分必要条件是，在新坐标系中矢量的长度也是由分量模的平方和表示，即

$$|y_1|^2+\cdots+|y_n|^2=|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2。\tag{114}$$

我們来証明，此时数量乘积在新的坐标系中也是由与(111)一样的公式表示。事实上，假定在原来的坐标系下我們有了两个矢量

$$\boldsymbol{x}(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\ \text{和}\ \boldsymbol{x}'(x_1',\ x_2',\ \cdots,\ x_n'),$$

并且在新坐标系中对应的矢量是

$$\boldsymbol{y}(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)\ \text{和}\ \boldsymbol{y}'(y_1',\ y_2',\ \cdots,\ y_n')。$$

我們作两个新的矢量 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}'$ 和 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{x}'$，它們的分量是 (x_k+x_k') 和 (x_k+ix_k')。假使条件(114)适合，我們就有：

$$\sum_{k=1}^{n}(y_k+y'_k)(\bar{y}_k+\bar{y}'_k)=\sum_{k=1}^{n}(x_k+x'_k)(\bar{x}_k+\bar{x}'_k)$$

再根据(114)，就得到

$$\sum_{k=1}^{n}(y_k\bar{y}'_k+y'_k\bar{y}_k)=\sum_{k=1}^{n}(x_k\bar{x}'_k+x'_k\bar{x}_k)\,; \tag{115$_1$}$$

因为 $\sum_{k=1}^{n}|y_k|^2=\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2$ 和 $\sum_{k=1}^{n}|y'_k|^2=\sum_{k=1}^{n}|x'_k|^2$。

同样地：

$$\sum_{k=1}^{n}(y_k+iy'_k)(\bar{y}_k-i\bar{y}'_k)=\sum_{k=1}^{n}(x_k+ix'_k)(\bar{x}_k-i\bar{x}'_k)$$

从而

$$\sum_{k=1}^{n}(y'_k\bar{y}_k-y_k\bar{y}'_k)=\sum_{k=1}^{n}(x'_k\bar{x}_k-x_k\bar{x}'_k)\,。 \tag{115$_2$}$$

由等式(115$_1$)和(115$_2$)即得

$$\sum_{k=1}^{n}y_k\bar{y}'_k=\sum_{k=1}^{n}x_k\bar{x}'_k, \tag{116}$$

这就是說，数量乘积的确还是由以前的公式表示。因之，如果变换(113)适合条件(114)，那么它也适合条件(116)，也就是說，保持数量乘积的值不变。反过来，如果在(116)中設 $x'_k=x_k$，从条件(116)就推出(114)，因为两个相同的矢量的数量乘积显然就是矢量长度的平方。适合条件(114)或者条件(116)的綫性变換通常叫做 *U 变換*。

如果考虑实空間和实綫性变換的矩陣，那么条件(114)就簡单地变成条件

$$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 \tag{117}$$

而相当的实变換叫做*正交变換*。它显然是 U 变換的一个特殊情形。

現在我們来闡明 U 变換的一些基本性质。用 u_{ik} 代表矩陣 U 的元素，对变換(113)我們把条件(114)完全写出来：

$$\sum_{k=1}^{n}|u_{k1}x_1+\cdots+u_{kn}x_n|^2=\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2$$

或者是

$$\sum_{k=1}^{n}(u_{k1}x_1+\cdots+u_{kn}x_n)(\overline{u}_{k1}\overline{x}_1+\cdots+\overline{u}_{kn}\overline{x}_n)=\sum_{k=1}^{n}x_k\overline{x}_k。\quad(118)$$

把公式左边的括号打开并让 $x_p\overline{x}_p$ 的系数等于 1，而 $x_p\overline{x}_q(p\neq q)$ 前的系数等于 0，对 U 变换的元素我們就得到一个充分而必要的条件，它写成下面的形式：

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}|u_{kp}|^2=1\quad(p=1,2,\cdots,n),\\&\sum_{k=1}^{n}u_{kp}\overline{u}_{kq}=0\qquad\qquad(p\neq q),\end{aligned}\right\}\quad(119)$$

这就是說，每一列元素的模的平方和必須等于 1，而一列的元素与另外一列相当元素的共軛数的乘积的和必須等于零。有时候这些条件写成：

$$\sum_{k=1}^{n}u_{kp}\overline{u}_{kq}=\delta_{pq},\quad(120)$$

这里 δ_{pq} 是单位矩陣的元素，即

$$\delta_{pq}=\begin{cases}0&(p\neq q)\\1&(p=q)。\end{cases}\quad(121)$$

上面我們是对恒等式(118)来应用未定系数法。当然，这是适合恒等式的充分条件。如果給 x_k 一些特定的值，那么不难証明同类項系数的相等也是必要条件。

我們取行列式 $D(A)$ 以及由共軛元素組成的行列式 $D(\overline{A})$。用列列相乘的方法[6]把它們乘起来，根据(119)我們就得到单位矩陣的行列式，也就是等于 1。在另一方面，显然这两个行列式的值是互相共軛的复数，从这里直接推出

$$|D(A)|^2=1,$$

这就是說，U 矩陣行列式模的平方等于 1。換句話說，U 矩陣的

行列式的模等于 1，也就是說它等于一个形式为 $e^{i\varphi}$ 的复数，这里 φ 是实数。

我們引入 U 的轉置矩陣 $U^{(*)}$。条件 (119) 通常叫做关于列的正交条件，它可以写成下面这个矩陣等式的形式：

$$\overline{U}^{(*)}U=I,\tag{122}$$

这相当于

$$U^{-1}=\overline{U}^{(*)}=\widetilde{U},\tag{123}$$

这就是說，如果一个矩陣是 U 矩陣，那么它的逆矩陣就等于它的厄密特共軛矩陣。

U 的逆变换 U^{-1} 是表示从矢量 $\boldsymbol{y}$ 到矢量 $\boldsymbol{x}$ 的轉换。它显然也滿足 U 矩陣的条件(114)，这就是說，如果 U 是一个 U 矩陣，那么它的逆 U^{-1} 也是 U 矩陣。换句話說，根据(123)矩陣 $\widetilde{U}$ 也是一个 U 矩陣，它的列也适合正交条件。但是 $\widetilde{U}$ 的列是 $\overline{U}$ 的行。因之我們可以肯定，在 U 矩陣中不但是列，同时行也适合正交条件，这就是說，与公式(120)同时我們还有公式

$$\sum_{k=1}^{n}u_{pk}\overline{u}_{qk}=\delta_{pq}\text{。}\tag{124}$$

同样地，如果矩陣 U_1 和 U_2 适合条件(114)，那么它們的乘积 U_2U_1 显然也适合这个条件，这就是說，两个 U 矩陣的乘积也是一个 U 矩陣。

我們来举出表示 U 矩陣的定义的两种不同的方式

$$|U\boldsymbol{x}|^2=|\boldsymbol{x}|^2 \text{ 或 } (U\boldsymbol{x},U\boldsymbol{x}')=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'),\tag{125$_1$}$$

这里在后面的等式中 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{x}'$ 是任意的矢量。

我們現在来指出在 U 矩陣的元素全是实数时所产生的情况。上面已經說过，在这个情形下它叫做正交矩陣而和它对应的变换叫做正交变换。在这个情形下代替公式(120)和(124)我們有下面的公式：

$$\sum_{k=1}^{n} u_{kp}u_{kq}=\delta_{pq};\quad \sum_{k=1}^{n} u_{pk}u_{qk}=\delta_{pq}\text{。}\tag{125$_2$}$$

同时变换的行列式显然一定是实数，所以它的值只能等于±1。n 維空間中的这些实正交变换就是我們在[20]中所討論的三維空間中这种变换的一个推广。此外，在实系数的情形下，$\tilde{U}$ 就等于 $U^{(*)}$，这就是說，把 U 的行换成列就得到逆变换 U^{-1}。

我們再指出，任何一个复数 $e^{i\varphi}$，其中 φ 是实数，如果把它看成矩陣 $[e^{i\varphi}, e^{i\varphi}, \cdots, e^{i\varphi}]$，就是一个 U 矩陣，如 U 是一个 U 矩陣，那么乘积 $e^{i\varphi}U$ 还是一个 U 矩陣。数和矩陣的乘积的意义在[25]中已經談过。

29. 彭雅科夫斯基不等式 在这一节里我們要来証明一个不等式，它是我們以后常用到的。在第二卷里我們已經給了这个不等式的推論[II; 156]。这个不等式是：不論 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 和 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 是怎样的实数，我們有：

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k\beta_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{m} \beta_k^2,\tag{126}$$

并且等号在而且仅在 α_k 和 β_k 成比例时才成立，即

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1}=\frac{\beta_2}{\alpha_2}=\cdots=\frac{\beta_m}{\alpha_m}\text{。}\tag{127}$$

設 ξ 是任意一个实数。我們作

$$S=\sum_{k=1}^{m} (\xi\alpha_k-\beta_k)^2,$$

它显然是 $\geqslant 0$。等号在而且仅在

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1}=\frac{\beta_2}{\alpha_2}=\cdots=\frac{\beta_m}{\alpha_m}=\xi$$

时才成立，在这个情形下，显然是：

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k\beta_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{m} \beta_k^2\text{。}$$

一般說来，把表达式 S 中的括号打开，我們得到一个二次三項式

$$S=A\xi^2-2B\xi+C,$$

其中 $A=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k^2;\quad B=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\beta_k;\quad C=\sum_{k=1}^{m}\beta_k^2$。

这个三項式对所有实的 ξ 都 $\geqslant 0$，由此推知：$AC-B^2\geqslant 0$，即，$B^2\leqslant AC$，这就是不等式(126)。

如果 $B^2-AC=0$，那么三項式对于某一实数 ξ 就必須等于零，因此我們知道，它就必須适合条件(127)。反过来，如果这个条件满足，公式(126)中等号就成立。現在我們假定 α_k 和 β_k 是复数。注意到和的模 $\leqslant$ 各項模的和，我們得到：

$$\left|\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\beta_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{m}|\alpha_k|\,|\beta_k|。$$

后面的和是由正項組成的，对它用不等式(126)，即得：

$$\left|\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\beta_k\right|^2\leqslant\sum_{k=1}^{m}|\alpha_k|^2\cdot\sum_{k=1}^{m}|\beta_k|^2。\qquad(126_1)$$

不难証明，在 α_k 和 β_k 是复数的情形下，等号在而且仅在 $|\alpha_k|$ 和 $|\beta_k|$ 成比例并且所有的乘积 $\alpha_k\beta_k$ 有相同的幅角时才成立。不等式(126)不仅能应用到和，同时对积分也能应用，以前已經提到过这一点[**II; 156**]。如果 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 是区間 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的两个实函数，那么对应于积分的不等式是：

$$\left[\int_a^b f_1(x)f_2(x)dx\right]^2\leqslant\int_a^b f_1^2(x)dx\cdot\int_a^b f_2^2(x)dx。\qquad(126_2)$$

事实上，我們作表达式：

$$\int_a^b[\xi f_1(x)-f_2(x)]^2dx=$$

$$=\xi^2\int_a^b f_1^2(x)dx-2\xi\int_a^b f_1(x)f_2(x)dx+\int_a^b f_2^2(x)dx,$$

这里 ξ 是任意实数。由左边的形式得知，这个表达式对任何的实数 ξ 都不会是負的。而从初等代数我們知道，如果三項式 $A\xi^2-2B\xi+C$ 对所有的实数 ξ 都是非負的，那么 $AC-B^2\geqslant 0$。把这

个結果用到上面的三項式就得出不等式 (126_2)。这个不等式对于积分是 В. Л. 彭雅科夫斯基第一个証明的。对于和是勾犀发現的。

30. 数量乘积和模的性质　現在我們来指出一些数量乘积和模的性质。应用不等式 (126_1) 并且注意到 $|\bar{y}_k|=|y_k|$，我們可以写下：

$$|(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})|^2=\left|\sum_{k=1}^{n} x_k \bar{y}_k\right|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\cdot\sum_{k=1}^{n}|y_k|^2,$$

即

$$|(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\|。\tag{128}$$

現在来証明所謂的三角形規則

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|。\tag{129}$$

我們有：

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=$$
$$=(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})+(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y})+(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})+(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x}),$$

或者，利用 (128) 即得：

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 \leqslant \|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2+2\|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\|=(\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|)^2,$$

由此推出 (129)。

最后，我們来考察坐标系的选擇对于空間度量的影响，也就是对于矢量长度平方的表达式的影响。假設我們取了一个新的坐标系来代替基础笛卡尔坐标系，而且作为基础单位矢量的是一些綫性无关的矢量

$$\boldsymbol{z}^{(1)},\ \boldsymbol{z}^{(2)},\ \cdots,\ \boldsymbol{z}^{(n)}。$$

对任一个矢量我們有：

$$\boldsymbol{x}=z_1\boldsymbol{z}^{(1)}+z_2\boldsymbol{z}^{(2)}+\cdots+z_n\boldsymbol{z}^{(n)},$$

这里 z_k 是它在新坐标系中的分量。

这个矢量长度的平方是由它和自身的数量乘积来表示的，即

$$\|\boldsymbol{x}\|^2=(z_1\boldsymbol{z}^{(1)}+\cdots+z_n\boldsymbol{z}^{(n)},\ z_1\boldsymbol{z}^{(1)}+\cdots+z_n\boldsymbol{z}^{(n)}),$$

根据以前的公式展开，对于矢量长度的平方我們就有下面的表达式：

$$\|x\|^2=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}z_i\bar{z}_k, \tag{130}$$

这里系数 a_{ik} 按下面的公式决定

$$a_{ik}=(z^{(i)},\ z^{(k)})。$$

把指标互换，显然就变成它的共轭数，即

$$a_{ik}=\bar{a}_{ki}。 \tag{131}$$

这种形式为(130)且系数满足条件(131)的和通常叫做厄密特型。显然地，每一个形式为(130)且适合条件(131)的表达式对于所有可能的复数 z_k 都只取实数値，因为对于 $i\neq k$ 和(130)中的两項是互相共軛的，而根据条件(131)項 $a_{kk}|z_k|^2$ 的系数 a_{kk} 是实数。此外，根据厄密特型(130)的来源，我們可以肯定，和(130)是非負的，并且在而且仅在所有的 z_k 全为零时才会等于零。公式(130)定义了在新坐标系下空間的度量。

度量(130)将和笛卡尔坐标系中的度量(110)一样，如果

$$a_{ik}=0\ 当\ i\neq k\ 和\ a_{kk}=1$$

或者是　$(z^{(i)},\ z^{(k)})=0$ 当 $i\neq k$，和 $(z^{(k)},\ z^{(k)})=1$，

换句話說就是，我們取作单位矢量的矢量 $z^{(k)}$ 是互相正交的单位矢量(长度为1的)。

我們注意，如果公式(113)定义了一个矢量的分量的 U 变换，那么相应的坐标系的变换由表

$$U^{(*)-1}$$

給出，它是 U 的逆步变换。在这个情形下，根据(123)这个表等于表 $\bar{U}$，而对于实的正交变换它就是 U 自己。

31. 矢量的正交化手續　假設給了任意的 m 个綫性无关的矢量 $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(m)}$。形式为

$$C_1\boldsymbol{x}^{(1)}+C_2\boldsymbol{x}^{(2)}+\cdots+C_m\boldsymbol{x}^{(m)}$$

的矢量的全体，其中 C_k 是任意的系数，当 $m=n$ 时就是我們的空間，而当 $m<n$ 时，它定义一个 m 維的子空間 R_m。我們来証明，我們总可以做出 m 个互相正交而又长度是 1 的矢量，它們和矢量 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 一样生成子空間 R_m。換句話說，这些新的正交的长度为 1 的矢量 $\boldsymbol{z}^{(k)}$ 可以由 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 綫性表示，并且反过来，$\boldsymbol{x}^{(k)}$ 也可以由 $\boldsymbol{z}^{(k)}$ 綫性表示。这些矢量可以按下面的格式来作：

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{y}^{(1)}=\boldsymbol{x}^{(1)}\\&\boldsymbol{y}^{(2)}=\boldsymbol{x}^{(2)}-(\boldsymbol{x}^{(2)},\ \boldsymbol{z}^{(1)})\boldsymbol{z}^{(1)}\\&\boldsymbol{y}^{(3)}=\boldsymbol{x}^{(3)}-(\boldsymbol{x}^{(3)},\ \boldsymbol{z}^{(1)})\boldsymbol{z}^{(1)}-(\boldsymbol{x}^{(3)},\ \boldsymbol{z}^{(2)})\boldsymbol{z}^{(2)}\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\qquad(132)$$

其中

$$\boldsymbol{z}^{(1)}=\frac{\boldsymbol{y}^{(1)}}{\|\boldsymbol{y}^{(1)}\|};\quad \boldsymbol{z}^{(2)}=\frac{\boldsymbol{y}^{(2)}}{\|\boldsymbol{y}^{(2)}\|};\quad\cdots;\quad \boldsymbol{z}^{(m)}=\frac{\boldsymbol{y}^{(m)}}{\|\boldsymbol{y}^{(m)}\|}。\qquad(133)$$

矢量 $\boldsymbol{z}^{(1)}$ 等于 $\boldsymbol{y}^{(1)}$ 用 $\boldsymbol{y}^{(1)}$ 的长度除，因之 $\boldsymbol{z}^{(1)}$ 的长度是 1。然后按照上面的公式作矢量 $\boldsymbol{y}^{(2)}$。由它的定义直接推知，它和 $\boldsymbol{z}^{(1)}$ 正交：

$$(\boldsymbol{y}^{(2)},\ \boldsymbol{z}^{(1)})=(\boldsymbol{x}^{(2)},\ \boldsymbol{z}^{(1)})-(\boldsymbol{x}^{(2)},\ \boldsymbol{z}^{(1)})(\boldsymbol{z}^{(1)},\ \boldsymbol{z}^{(1)})=0。$$

用 $\boldsymbol{y}^{(2)}$ 的长度除 $\boldsymbol{y}^{(2)}$，就得到 $\boldsymbol{z}^{(2)}$。然后再按照上面的公式作矢量 $\boldsymbol{y}^{(3)}$。由此直接推知，它和 $\boldsymbol{z}^{(1)}$ 与 $\boldsymbol{z}^{(2)}$ 正交。

因为，根据 $\boldsymbol{z}^{(1)}$ 和 $\boldsymbol{z}^{(2)}$ 的正交性，我們有

$$(\boldsymbol{y}^{(3)},\ \boldsymbol{z}^{(2)})=(\boldsymbol{x}^{(3)},\ \boldsymbol{z}^{(2)})-(\boldsymbol{x}^{(3)},\ \boldsymbol{z}^{(2)})(\boldsymbol{z}^{(2)},\ \boldsymbol{z}^{(2)})=0。$$

用 $\boldsymbol{y}^{(3)}$ 的长度除 $\boldsymbol{y}^{(3)}$，就得到 $\boldsymbol{z}^{(3)}$，如此下去。

所有这些新作出的矢量全可以由 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 綫性表示。反过来也不难看出，$\boldsymbol{x}^{(k)}$ 可以由 $\boldsymbol{z}^{(k)}$ 表示。为了这一点我們只需要逐步地从上面的等式中解出 $\boldsymbol{x}^{(1)}$，$\boldsymbol{x}^{(2)}$，等等。

我們应当注意，在新作出的矢量 $\boldsymbol{y}^{(k)}$ 中沒有一个会等于零。

事实上，如果在計算的某一步我們得到了一个矢量 $y^{(k)}$ 是零，那么，因为它可以由 $x^{(s)}$ 綫性表示，并且 $x^{(k)}$ 在这个綫性表达式中的系数是 1，我們就得到了一个矢量 $x^{(s)}$ 之間的綫性关系，这与这些矢量是綫性无关的条件違背。

我們記得，如果有了一組不等于零的两两正交的矢量，那么它們一定是綫性无关的。

如果 $m=n$，那么 $z^{(k)}$ 就給出了一組組成笛卡尔坐标的正交单位矢量。如果 $m<n$，那么为了得到一个完全的笛卡尔坐标系，我們就需要在作出的矢量 $z^{(k)}$ 之外再作 $(n-m)$ 个矢量，它們相互之間以及和矢量 $z^{(k)}$ 都是正交的。这样一来，这些新的单位矢量就生成一个 $(n-m)$ 維的子空間 R'_{n-m}，它和子空間 R_m 正交[**12**]。这些新的所要求的矢量 u 必須适合方程組

$$(u, x^{(1)})=0, \ \cdots, \ (u, x^{(m)})=0 。$$

这里我們有了一个含有 n 个未知数的 m 个齐次方程的方程組，并且由于矢量 $x^{(k)}$ 是綫性无关的[**12**]，方程組的秩等于 m。这个方程組有 $(n-m)$ 个綫性无关的解，也就是說，我們得到 $(n-m)$ 个綫性无关的矢量。对这些矢量应用上面讲过的正交化手續并把长度化成 1，我們就得到一个綫性无关矢量的完全組。

我們再注意一点。由正交单位矢量 $z^{(k)}$ 生成的子空間 R_m 还可以由其他的正交单位矢量組生成。事实上，我們只需要对矢量組 $z^{(k)}$ 施行一个 U 变換就行了。因此我們看到，矢量組正交化的手續可以用不同的办法来做，而上面所說的办法只給出了可能的办法之一。

32. 化二次型为平方和　在空間中我們来考虑一个中心在原点的二次曲面

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+G=0 。$$

我們总可以选擇一个新的坐标系 (x', y', z') 使得变換后的方

程只含有坐标平方的項，这就是說，使变换后的方程有下面的形式：

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\lambda_3 z'^2+G=0。$$

問題归結到找这样一个变数 (x, y, z) 和 (x', y', z') 之間的正交变换，它把方程左边的全部二次項化成平方和。对于 n 維的实空間我們要提出相似的問題。假設我們有了一个 n 个变数的实二次型：

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k, \tag{134}$$

而且 a_{ik} 是实系数，适合条件

$$a_{ik}=a_{ki}。 \tag{135}$$

在前面的例子里我們可以看成 $x=x_1$，$y=x_2$，$z=x_3$ 以及 $a_{11}=$ $=A$; $a_{22}=B$; $a_{33}=C$; $a_{12}=a_{21}=D$; $a_{13}=a_{31}=E$; $a_{23}=a_{32}=F$。

由元素 a_{ik} 組成的矩陣我們叫做二次型(134)的矩陣。这个矩陣是对称的，即等于它的轉置。

假定引入了新的变数 x'_k，我們把二次型化到新的变数，而且变换是：

$$(x_1, \cdots, x_n)=B(x'_1, \cdots, x'_n), \tag{136}$$

其中矩陣 B 的元素是 b_{ik}。把表达式(136)代入(134)，即得：

$$\varphi=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(b_{i1}x'_1+\cdots+b_{in}x'_n)(b_{k1}x'_1+\cdots+b_{kn}x'_n)。$$

去括号，对 $p\neq q$ 我們得到 $x'_p x'_q$ 的系数：

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(b_{ip}b_{kq}+b_{iq}b_{kp})。$$

利用(135)不难看出，这个表达式的一半就等于：

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ip}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kq}。$$

因此，同样地整理 $p=q$ 的項，我們看到在新的变数下二次型

是:

$$\varphi=\sum_{i,k=1}^{n}c_{ik}x_i'x_k', \tag{137}$$

其中
$$c_{ik}=c_{ki}=\sum_{t=1}^{n}b_{ti}\sum_{s=1}^{n}a_{ts}b_{sk}\text{。}$$

对 s 求和給出$\{AB\}_{tk}$。对于因子 b_{ti} 如果把 t 看作列数，i 看作行数，那么 b_{ti} 就是轉置矩陣的元素 $\{B^{(*)}\}_{it}$，从而

$$c_{ik}=c_{ki}=\sum_{i,k=1}^{n}\{B^{(*)}\}_{it}\{AB\}_{tk},$$

这就是說，变換后二次型(137)的矩陣是被变換前二次型的矩陣 A 和变換矩陣 B(136)按下面的办法确定:

$$C=B^{(*)}AB\text{。} \tag{138}$$

如果变換 (136) 是正交的，那么对于正交矩陣 B，轉置矩陣 $B^{(*)}$ 就等于逆矩陣 B^{-1}，在这个情形代替公式(138)我們有公式:

$$C=B^{-1}AB\text{。} \tag{139}$$

因此，关于找一个正交变換 (136) 把二次型(134)化成平方和的問題就相当于找一个正交矩陣 B，它使矩陣(139)就簡单地是一个对角矩陣$[\lambda_1, \cdots, \lambda_n]$，因为一个平方和的二次型的矩陣就是一对角矩陣，而且元素 λ_k 就是平方項 $x_k'^2$ 前的系数。于是象以前一样，我們应当有

$$B^{-1}AB=[\lambda_1, \cdots, \lambda_n]$$

或者

$$AB=B[\lambda_1, \cdots, \lambda_n]\text{。} \tag{140}$$

应該注意，在这里矩陣 A 不是任意的矩陣，而是实对称矩陣，同时 B 必須是正交矩陣，我們将按在 [27] 中討論一般情形时所用的办法来做。把方程(140)改写成:

$$\sum_{s=1}^{n}a_{is}b_{sk}=\lambda_k b_{ik}\text{。} \tag{141}$$

从这里对于矩陣 B 的第 k 列元素我們有 n 个方程。引入一个分量为 $(b_{1k}, \cdots, b_{nk})$ 的矢量 $\boldsymbol{x}^{(k)}$，我們就可以把上面这个方程写成：

$$A\boldsymbol{x}^{(k)}=\lambda_k\boldsymbol{x}^{(k)}。\tag{142}$$

把(141)的项全移到一边，为了确定 $b_{1k}, \cdots, b_{nk}$ 我們有 n 个齐次方程

$$\left.\begin{aligned} &(a_{11}-\lambda_k)b_{1k}+a_{12}b_{2k}+\cdots+a_{1n}b_{nk}=0\\ &a_{21}b_{1k}+(a_{22}-\lambda_k)b_{2k}+\cdots+a_{2n}b_{nk}=0\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &a_{n1}b_{1k}+a_{n2}b_{2k}+\cdots+(a_{nn}-\lambda_k)b_{nk}=0。\end{aligned}\right\}\tag{143}$$

这个方程組的行列式必須等于零，因此对于数 λ_k 我們得到了一个 n 次代数方程：

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n}\\ a_{21}, & a_{22}-\lambda, & \cdots, & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots, & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0。\tag{144}$$

我們知道，这就是矩陣 A 的特征方程。

首先我們来証明，对于实对称矩陣 A 方程 (144) 的根全是实的。我們預先給二次型一个新的写法。設 $\boldsymbol{x}$ 是一个分量为 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的矢量，它是实数的或者是复数的，而 A 是一个矩陣，它的元素 a_{ik} 是任意的。我們作数量乘积：

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i(a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n)。$$

它可以写成：

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\bar{x}_ix_k。\tag{145}$$

如果适合条件

$$a_{ki}=\bar{a}_{ik}\quad(a_{kk}\text{ 是实数}),\tag{146}$$

那么这就是一个厄密特型，它的值一定是实数。A 是实对称矩陣

的情形只是条件(146)的一个特殊情形。如果同时矢量 $\boldsymbol{x}$ 的分量也是实数,那么公式(145)給出二次型(134)。

現在来証明方程(144)的根全是实的。設 λ_k 是这个方程的一个根。于是方程(143)就給出矢量 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 的分量(实数或者复数),这个矢量适合方程(142)。求这两边和矢量 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 的数量乘积。我們得到:

$$\|\boldsymbol{x}^{(k)}\|^2\lambda_k=(A\boldsymbol{x}^{(k)},\ \boldsymbol{x}^{(k)})。$$

我們看到,右边的表达式是实数,因之 λ_k 也是实数。这样一来,我們証明了方程(144)的根全是实的,不但对于实对称矩陣,同时也对于适合条件(146)的矩陣。这样的矩陣通常叫做厄密特矩陣。

在所討論的情形中方程(143)的系数是实数,因之我們可以认为 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 的分量也是实数。現在我們来証明,如果 λ_p 和 λ_q 是方程(144)两个不同的根,那么相应的适合方程(142)的两个矢量 $\boldsymbol{x}^{(p)}$ 和 $\boldsymbol{x}^{(q)}$ 互相正交。按条件我們有

$$A\boldsymbol{x}^{(p)}=\lambda_p\boldsymbol{x}^{(p)};\quad A\boldsymbol{x}^{(q)}=\lambda_q\boldsymbol{x}^{(q)}。$$

第一个方程用 $\boldsymbol{x}^{(q)}$ 作数量乘积,第二个用 $\boldsymbol{x}^{(p)}$ 作数量乘积,然后相減,卽得:

$$(A\boldsymbol{x}^{(p)},\ \boldsymbol{x}^{(q)})-(\boldsymbol{x}^{(p)},\ A\boldsymbol{x}^{(q)})=(\lambda_p-\lambda_q)(\boldsymbol{x}^{(p)},\ \boldsymbol{x}^{(q)})。\quad(147)$$

現在来証明,对于任意两个矢量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ (实数的或复数的)只要矩陣 A 的元素适合条件(146)下面的公式成立

$$(A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{y}),\quad(148)$$

事实上,公式(148)的左边是:

$$(A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=\sum_{k=1}^{n}(a_{k1}x_1+\cdots+a_{kn}x_n)\bar{y}_k=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ki}x_i\bar{y}_k,$$

或者,由于(146):

$$(A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=\sum_{i,k=1}^{n}\bar{a}_{ik}x_i\bar{y}_k。$$

这就是公式(148)右边的結果。实正交矩陣是厄密特矩陣的一个特殊情形，因之这个公式对实正交矩陣也对。根据(148)，(147)的左边等于零，但 $\lambda_p \neq \lambda_q$，所以 $(x^{(p)}, x^{(q)})=0$，这就是說，矢量 $x^{(p)}$ 和 $x^{(q)}$ 的确是正交的。在它們是实矢量的情形，正交的条件就是它們分量乘积的和等于零。

如果方程(144)有不同的根，那么我們就有了 n 个互相正交的实矢量 $x^{(k)}$。方程(142)对 $x^{(k)}$ 是綫性齐次的，因之我們可以把这个方程的解乘以任意常数。因之，我們可以认为上面所說的矢量 $x^{(k)}$ 都是长度为 1 的。

这些矢量的分量組成矩陣 B 的列。換句話說，这个矩陣的列适合正交条件而因此是一个正交矩陣。因此，在方程(144)有不同的根这个假定下，我們用正交变换化二次型成平方和的問題，或者化矩陣 A 成对角形的問題是解决了。数 λ_k 有时候叫做矩陣 A 的特征值，而矢量 $x^{(k)}$ 叫做这个矩陣的特征矢量。

33. 特征方程有重根的情形 現在我們轉入一般情形的討論，就是方程(144)可能有重根的情形。我們取方程(144)的一个根 $\lambda=\lambda_1$ 并找出一个与之相应的方程(142)的解。这是某一个长度为 1 的实矢量 $x^{(1)}$。再添加 $n-1$ 个实的单位矢量，使它們共同組成一个完全的正交单位矢量組 [**31**]。我們知道，从原来的坐标轉換到这个新的坐标，是由矢量分量的一个正交变换来表示，而矩陣 A 就变为相似矩陣 $A_1=B_1^{-1}AB_1$。对应于这个新的矩陣，方程

$$A_1 x=\lambda x \tag{149}$$

以矢量 $x^{(1)}$ 作为它与特征值 $\lambda=\lambda_1$ 相应的一个解(特征值經过相似变换不換)，矢量 $x^{(1)}$ 現在被取作第一个单位矢量，因之它的分量是 $(1, 0, \cdots, 0)$。把这个解代入方程(149)，得：

$$A_1(1, 0, \cdots, 0)=(\lambda_1, 0, \cdots, 0),$$

从而立即得出第一列的元素：

$$\{A_1\}_{11}=\lambda_1;\ \{A_1\}_{21}=\{A_1\}_{31}=\cdots=\{A_1\}_{n1}=0。\quad (150)$$

現在来証明，实矩陣 A_1 也是对称的，也就是說，它等于它的轉置。因为

$$A_1^{(*)}=(B_1^{-1}AB_1)^{(*)}=B_1^{(*)}A^{(*)}B_1^{(*)-1}。$$

但是根据矩陣 B_1 的正交性：

$$B_1^{(*)}=B_1^{-1}\ 和\ B_1^{(*)-1}=B_1,$$

于是
$$A_1^{(*)}=A_1。$$

注意到公式(150)以及矩陣 A_1 的对称性，我們可以写下：

$$\{A_1\}_{11}=\lambda_1;\ \{A_1\}_{21}=\{A_1\}_{12}=\cdots=\{A_1\}_{n1}=\{A_1\}_{1n}=0,$$

这就是說，在矩陣 A_1 中所有的第一行和第一列的元素，除去 $\{A_1\}_{11}=\lambda_1$ 外，全是零，即，矩陣 A_1 有下面的形式：

$$A_1=\left\|\begin{matrix}\lambda_1, & 0, & \cdots, & 0\\ 0, & a_{22}^{(1)}, & \cdots, & a_{2n}^{(1)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0, & a_{n2}^{(1)}, & \cdots, & a_{nn}^{(1)}\end{matrix}\right\|,$$

这里我們以 $a_{ik}^{(1)}$ 表 A_1 的元素。

在新的变数下二次型 φ 有下面的形式：

$$\varphi=\lambda_1 y_1'^2+\sum_{i,k=2}^{n}a_{ik}^{(1)}y_i'y_k'。$$

这样一来，我們分出了一个平方項并且引导到一个 $n-1$ 个变数的二次型的討論

$$\sum_{i,k=2}^{n}a_{ik}^{(1)}y_i'y_k'$$

或者同样地，引导到一个相应的 $n-1$ 阶矩陣 C_1 的討論，它是矩陣 A_1 的一部分。現在在由后 $n-1$ 个单位矢量所生成的 $n-1$ 維子空間中用和上面完全一样的办法，就可以找出一个单位矢量 $x^{(2)}$，它是方程

$$C_1 x^{(2)} = \lambda_2 x^{(2)}$$

的解。

显然这个矢量和矢量 $x^{(1)}$ 是正交的。第二个变换保持 $x^{(1)}$ 不变，而把其余的单位矢量变到另一組互相正交的单位矢量，新单位矢量中的第一个就是 $x^{(2)}$。在这組新的变换下二次型 φ 有下面的形式:

$$\varphi = \lambda_1 y_1''^2 + \lambda_2 y_2''^2 + \sum_{i,k=3}^{n} a_{i,k}^{(2)} y_i'' y_k''。$$

继續这样做下去，最后我們把二次型化成了平方和，也就是說，把相应的矩陣化成了对角形式。这是施行一系列的正交变換的結果，显然这可以由一个正交变換 B 得到，B 就是这些变換的乘积。

最后的对角矩陣

$$B^{-1}AB = [\lambda_1, \cdots, \lambda_n] \tag{151}$$

和原来的矩陣 A 是相似的，因之它的特征方程

$$\begin{vmatrix} \lambda_1-\lambda, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & \lambda_2-\lambda, & \cdots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & \cdots, & \lambda_n-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

和方程(144)一样，换句話說，在化得的二次型

$$\varphi = \lambda_1 x_1'^2 + \cdots + \lambda_n x_n'^2 \tag{152}$$

中平方項前的系数 λ_k 就是方程(144)的根，并且每一个重根在这里重复出現的次数就等于它的重数。

我們知道，最后的正交变換 B 的每一列給出了方程(142)的解矢量，并且由求 B 的规則可以推知，与它們每一个相应的值 λ_k 就是二次型(152)中相应变数前的系数。我們来更确切地指出这个关系。适合条件(140)的正交变換 B 按照(136)把变数$(x_1', \cdots,$

x'_n) 变到变数 ($x_1, \cdots, x_n$)。

逆变換 B^{-1} 就是 B 的轉置，这就是說，我們有：

$$x'_k = b_{1k}x_1 + \cdots + b_{nk}x_n \quad (k=1, 2, \cdots, n) \tag{153}$$

并且分量为 ($b_{1k}, \cdots, b_{nk}$) 的矢量 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 是方程 (142) 在 $\lambda=\lambda_k$ 时的解。

最后我們来証明我們是找到了方程 (142) 全部的解。首先，由前面的推理知道，λ_k 必須是方程 (144) 的根。我們取这个方程的任意一个根 λ，并且为了明确起見假定它的重数是三，并且可以认为 $\lambda=\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$。前面的办法給出了方程

$$A\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x} \tag{154}$$

的三个解：

$$\boldsymbol{x}^{(1)}(b_{11}, \cdots, b_{n1}); \quad \boldsymbol{x}^{(2)}(b_{12}, \cdots, b_{n2}); \quad \boldsymbol{x}^{(3)}(b_{13}, \cdots, b_{n3})。$$

我們来証明，方程 (154) 的任何一个解一定是它們的綫性組合。事实上，如果不是如此，那么我們就有一个解 $\boldsymbol{y}$，它和 $\boldsymbol{x}^{(1)}$，$\boldsymbol{x}^{(2)}$，$\boldsymbol{x}^{(3)}$ 是綫性无关的。矢量 $\boldsymbol{y}$ 可能是复数的，不过在这个情形下它的实数部分和虛数部分必須分別适合方程 (154)，因为这个方程是实系数的。显然，它們中至少有一个是与 $\boldsymbol{x}^{(k)}(k=1, 2, 3)$ 綫性无关的特征矢量。因之我們可以认为上面所說的矢量 $\boldsymbol{y}$ 本身就是一个实矢量。我們上面已經証明过，它一定和所有的矢量 $\boldsymbol{x}^{(k)}(k>3)$ 正交，因为后面的这些矢量所对应的值 λ_k 不等于 λ_1。这样我們得出結論，矢量 $\boldsymbol{y}$ 和整个矢量組 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 綫性无关，这就是說，我們有了 $n+1$ 个綫性无关的矢量，这是不可能的。于是，对于方程 (144) 的每一个重数为 m 的根，方程 (154) 都有 m 个綫性无关的实解。

把方程組 (143) 中的 λ_k 用一个重数为 m 的根 $\lambda=\lambda_0$ 代入，我們得到一个齐次方程組，它有 m 个綫性无关的解，这就是說，这个方程組的秩等于 $(n-m)$。換句話說，这个方程組可以归結成 $n-m$

个方程。取这个方程組的任意一个解，再乘上一个倍数使这些数的平方和等于 1。这样，我們就得到了一个相应于所取的根 $\lambda=\lambda_0$ 的矢量。为了求其余的矢量，在这 $n-m$ 个方程外再加上一个方程，它表示所要求的矢量和已求得的矢量正交。因此，为了找出一个新的矢量的分量，我們有一个含有 $(n-m+1)$ 个方程的齐次方程組。取这个方程組的一个解，也把它化成长度为 1 的矢量，进一步我們来找相应于 $\lambda=\lambda_0$ 的第三个矢量。为了这个目的，在基本的 $n-m$ 个方程外我們再加两个方程，它們表示所要求的矢量和已求得的两个矢量正交，这样一直下去，直到我們找到了相应于重数为 m 的根 $\lambda=\lambda_0$ 的全部 m 个互相正交的单位矢量为止。从上面所說的做法中可以看出求方程(142)的基础解时的某种任意性。如果方程的根全是单根，那么这种任意性就只是矢量 $x^{(k)}$ 的分量可以乘以 -1。現在我們假定方程(144)有一个重数为 m 的根。在这个情形下，作为方程(142)的解的对应的 m 个互相正交的单位矢量生成一个 m 維的子空間 R_m。显然，在这个子空間中我們可以任意地选擇互相正交的单位矢量，并且它們都将是方程(142)当 $\lambda=\lambda_0$ 时的解，这就是說，施行子空間 R_m 的一个正交变换，我們可以从一組正交的长度为 1 的解轉变到另外一組这样的解。上面的討論对方程(144)任意的重根都对。

为了闡明上面的討論，我們回到在上一节开始时提出的問題，就是化二次曲面的方程到对称軸的問題。为了明确起見，我們假定这个曲面是一个椭圓面。方程 (144) 有不同的根的情形就相当于这个椭圓面所有的半軸全不相等。在这个情形下，坐标軸选擇的任意性就只是改变坐标軸的方向。如果方程 (144)，它在現在所討論的情形中是一个三次方程，有两个相同的根，那么这个椭圓面是一个旋轉椭圓面，在通过中心与旋轉軸垂直的平面上可以任意选擇它的两根对称軸，只要它們是互相正交的就行，这就是說，

在这个情形下，坐标軸选擇的任意性就在于在上面所說的平面上可以作任意的正交变換。最后，如果方程(144)有三个相同的根，那么我們的椭圓面就是一个球面，并且我們的方程不包含坐标乘积的項。在这个情形下，我們可以完全任意地选擇空間中的笛卡尔坐标。

34. 例 我們来看两个数字的例子。

1. 化下面的曲面方程到对称軸：

$$x_1^2+5x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+6x_1x_3+2x_2x_3=5。$$

与之相当的二次型是

$$\varphi=\begin{cases} x_1^2+x_1x_2+3x_1x_3, \\ x_2x_1+5x_2^2+x_2x_3, \\ 3x_3x_1+x_3x_2+x_3^2。\end{cases}$$

它矩陣的特征方程是

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda, & 1, & 3 \\ 1, & 5-\lambda, & 1 \\ 3, & 1, & 1-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

根据第一行的元素展开，得

$$(1-\lambda)[(5-\lambda)(1-\lambda)-1]-(1-\lambda-3)+3[1-3(5-\lambda)]=0$$

或
$$\lambda^3-7\lambda^2+36=0。$$

不难算出，这个方程的根是

$$\lambda_1=-2;\quad \lambda_2=3;\quad \lambda_3=6;$$

因而对于对称軸我們曲面的方程是

$$-2x_1'^2+3x_2'^2+6x_3'^2=5。$$

现在我們来确定正交矩陣的元素

$$B=\begin{Vmatrix} b_{11}, & b_{12}, & b_{13} \\ b_{21}, & b_{22}, & b_{23} \\ b_{31}, & b_{32}, & b_{33} \end{Vmatrix}。$$

对于它們我們有方程組

$$\left.\begin{aligned} (1-\lambda)b_{1k}+b_{2k}+3b_{3k}=0, \\ b_{1k}+(5-\lambda)b_{2k}+b_{3k}=0, \\ 3b_{1k}+b_{2k}+(1-\lambda)b_{3k}=0。\end{aligned}\right\} \tag{155}$$

首先用 $\lambda=\lambda_1=-2$ 代入，我們得出两个方程

$$3b_{11}+b_{21}+3b_{31}=0$$
$$b_{11}+7b_{21}+b_{31}=0。$$

这个方程組的解是

$$b_{11}=-k_1;\quad b_{21}=0;\quad b_{31}=k_1,$$

这里 k_1 是任意数。我們选擇 k_1 使这組解的三个数的平方和等于 1。最后得到:

$$b_{11}=\frac{1}{\sqrt{2}};\quad b_{21}=0;\quad b_{31}=-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

这里的三个数都反一下号也可以。

現在以 $\lambda=\lambda_2=3$ 代入方程組(155)的系数中去。我們就得到一个方程組，其中第三个方程是第一第二的差，因之归結到两个方程

$$-2b_{12}+b_{22}+3b_{32}=0$$
$$b_{12}+2b_{22}+b_{32}=0。$$

不难求出这个方程組的解，把它化成单位长度:

$$b_{12}=\frac{1}{\sqrt{3}};\quad b_{22}=-\frac{1}{\sqrt{3}};\quad b_{32}=\frac{1}{\sqrt{3}}。$$

最后，以第三个根代入方程組(155)的系数中去。我們又得到一方程組，其中的一个方程是另外两个的必然結果。解余下的两个方程，再把所得的解化成单位长度，得:

$$b_{13}=\frac{1}{\sqrt{6}};\quad b_{23}=\frac{2}{\sqrt{6}};\quad b_{33}=\frac{1}{\sqrt{6}}。$$

在这个情形下，变量的变换公式是

$$x_1'=\frac{1}{\sqrt{2}}x_1\qquad\qquad-\frac{1}{\sqrt{2}}x_3$$
$$x_2'=\frac{1}{\sqrt{3}}x_1-\frac{1}{\sqrt{3}}x_2+\frac{1}{\sqrt{3}}x_3$$
$$x_3'=\frac{1}{\sqrt{6}}x_1+\frac{2}{\sqrt{6}}x_2+\frac{1}{\sqrt{6}}x_3。$$

2．化下面的曲面方程到对称轴

$$2x_1^2+6x_2^2+2x_3^2+8x_1x_3=1。$$

与这个方程对应的二次型是

$$\varphi=\begin{cases}2x_1^2+0x_1x_2+4x_1x_3,\\0x_2x_1+6x_2^2\;+0x_2x_3,\\4x_3x_1+0x_3x_2+2x_3^2,\end{cases}$$

它矩陣的特征方程是

$$\begin{vmatrix}2-\lambda, & 0, & 4\\0, & 6-\lambda, & 0\\4, & 0, & 2-\lambda\end{vmatrix}=0。$$

展开行列式，得方程:　　$\lambda^3-10\lambda^2+12\lambda+72=0。$

它的根是　　$\lambda_1=-2;\quad\lambda_2=\lambda_3=6,$

这就是説，这个方程有一个二重根。

現在来确定正交变换的系数，对于它們我們有方程組：

$$\begin{aligned}(2-\lambda)b_{1k} \quad\quad &+4b_{3k}=0\\ (6-\lambda)b_{2k} \quad &=0\\ 4b_{1k} \quad +(2-\lambda)b_{3k}&=0。\end{aligned} \tag{155_1}$$

用 $\lambda=-2$ 代入，不难算出，化成单位长的解是

$$b_{11}=\frac{1}{\sqrt{2}};\quad b_{21}=0;\quad b_{31}=-\frac{1}{\sqrt{2}}。$$

現在我們把二重根 $\lambda=6$ 代到方程組 (155_1) 的系数中去，对于它我們应当得到两个綫性无关并且互相正交的解。代入后，方程組归結到一个方程

$$-b_{12}+b_{32}=0。$$

我們取这个方程的一个化成单位长的解

$$b_{12}=\frac{1}{\sqrt{2}};\quad b_{22}=0;\quad b_{32}=\frac{1}{\sqrt{2}}。$$

为了求第二个解我們要注意，它一方面需要是 (155_1) 的解，同时它还要适合与已求出的解正交的条件。因之，为了求这个解我們有两个方程

$$\begin{aligned}-b_{13}+\quad b_{33}&=0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}b_{13}+\frac{1}{\sqrt{2}}b_{33}&=0\end{aligned}$$

或者

$$b_{13}=b_{33}=0,$$

因而化成单位长的解是

$$b_{13}=0;\quad b_{23}=1;\quad b_{33}=0。$$

最后，我們得到了正交变换：

$$\begin{aligned}x_1'&=\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}x_3\\ x_2'&=\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 \quad +\frac{1}{\sqrt{2}}x_3\\ x_3'&=\quad\quad x_2\end{aligned}$$

并且曲面方程在对称軸下化成了：

$$-2x_1'^2+6(x_2'^2+x_3'^2)=1。$$

35．二次型的分类　化二次型成平方和的問題还可以在一种比上面更为一般的形式下提出，在上面是要求从新变数到旧变数的綫性变换是正交的，現在我們以下面的形式提出問題，即：要把一个实二次型(134)化成：

$$\varphi=\mu_1X_1^2+\mu_2X_2^2+\cdots+\mu_nX_n^2, \tag{156}$$

其中 X_k 是变数 x_k 的任意 n 个綫性无关的綫性型。在这个問題里，系数 μ_k 和上面的不同，它們不是什么一定的数，不过对于这些系数我們还是可以作一些断言，即：不为零的系数的个数一定等于由二次型的系数 a_{ik} 所組成的表的秩。換句話說，把二次型化成綫性无关的綫性型的平方和，对于任意的化法，其中平方的个数一定等于上面所說的表的秩。此外，还有一个性质，它通常叫做二次型的惯性律，就是：对于化实二次型成形式(156)的任意化法，其中綫性型也是实系数的，正系数 μ_k 的个数(以及負系数 μ_k 的个数)总是一样的。上面所說的这些話将在这一节的最后給以証明。

这里提出的关于化二次型成形式(156)的一般的問題可以异常簡单地用配完全平方的办法来解决。我們以一个特例来説明这个方法：

$$\varphi=x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2x_1x_2-6x_1x_3+8x_2x_3。$$

在項 $(x_1^2+2x_1x_2-6x_1x_3)$ 上加上 $(x_2^2+9x_3^2-6x_2x_3)$，我們就得到一个完全平方，那么二次型 φ 可以写成：

$$\varphi=(x_1+x_2-3x_3)^2+3x_2^2-8x_3^2+14x_2x_3。$$

完全一样地，再配出一个平方，最后我們就把二次型表成了形式(156)：

$$\varphi=(x_1+x_2-3x_3)^2-2\left(2x_3-\frac{7}{4}x_2\right)^2+\frac{73}{8}(x_2)^2。$$

圓括弧里的綫性型显然是綫性无关的。

在表达式 φ 沒有平方項的情形，做法就有些不同。假設我們有：

$$\varphi=ax_1x_2+Px_1+Qx_2+R,$$

这里 a 是一个不等于零的系数，P 和 Q 是两个不含有 x_1 和 x_2 的綫性型，R 是一个二次型，它也不含有 x_1 和 x_2。我們可以写：

$$\varphi=a\left(x_1+\frac{Q}{a}\right)\left(x_2+\frac{P}{a}\right)+R-\frac{PQ}{a}。$$

如果令：
$$X_1=\frac{1}{2}\left(x_1+x_2+\frac{P+Q}{a}\right);\quad X_2=\frac{1}{2}\left(x_1-x_2-\frac{P-Q}{a}\right)$$

以及
$$\varphi_1=R-\frac{PQ}{a},$$

那么就得到：
$$\varphi=aX_1^2-aX_2^2+\varphi_1,$$

这里 φ_1 是一个二次型，它不再包含 x_1 和 x_2。分出两个平方之后，我們就去掉了两个变数。

化二次型成形式 (156) 使我們有可能給二次型一个自然的分类。我們来考虑下面这几种情形。

I. 假設在公式(156)中所有的系数 μ_k 全是正的。在这个情形下二次型叫做正定的。不难証明，它对 x_k 的所有的实数值都取正值，当而且仅当全部 x_k 是零的时候它才等于零。事实上，为了使公式(156)右边等于零，由于所有的 μ_k 全是正的，充分而且必要的条件是所有的 x_k 的綫性型全等于零，因此我們得到 x_k 的一个 n 个齐次方程的方程組，并且它的行列式不为零(因綫性型是綫性无关的)，而这个方程組显然只有零解。

II. 如果所有的系数 μ_k 全是負的，那么二次型就叫做負定的。和上面一样，我們可以証明，它对所有的实 x_k 只取負值，并且当而且仅当所有的 x_k 是零时才等于零。

III. 現在我們来考虑系数 μ_k 中有等于零，而所有不等于零的全有相同的正負号，譬如全是正的这种情形。在这种情形下二次型 φ 可以表成：

$$\varphi=\mu_1X_1^2+\cdots+\mu_mX_m^2 \qquad (m<n), \tag{156$_1$}$$

这里所有的 μ_k 全是正的。这里我們的二次型对任何的 x_k 的值也都不能取負值，不过在 x_k 不全为零时它可能等于零。事实上，为了使二次型的值为零，我們就有一組 x_k 的 m 个齐次方程：

$$X_1=X_2=\cdots=X_m=0,$$

因为 $m<n$，所以这个方程組有异于零的解。完全一样地，如果 (156_1) 中系数 μ_k 全是負的，那么二次型就不可能取正值，不过对不全为零的 x_k 它可能等于零。在这种情形下二次型叫做半定的，正或者負。

IV. 最后，如果(156)中的系数 μ_k 既有正的又有負的，那么不难看出，二次型对于 x_k 的实数值就既可以取正值也可以取負值。在这个情形它叫做不定的。

以上二次型的分类对多元函数极大和极小的問題有直接的应用。設我們有了一 n 个自变数 $x_1, \cdots, x_n$ 的函数:

$$\psi(x_1, \cdots, x_n),$$

并且在 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 时它满足极大和极小的必要条件，这就是說，函数 ψ 对自变数所有的偏微商全等于零。把函数展成麦克劳林級数，卽得

$$\psi(x_1, \cdots, x_n)-\psi(0, \cdots, 0)=\varphi(x_1, \cdots, x_n)+\omega,$$

这里我們以 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 表变数 x_k 的一个二次型，ω 是变数 x_k 高于二次的項的集合。如果二次型 φ 是正定的，那么函数在 $x_1=\cdots=x_n=0$ 有极小値。如果是負定的，函数有极大値。如果它是不定的，那么既不是极小也不是极大，最后，如果 φ 是半定的，那么我們碰到了一个可疑的情形，这个結果是我們在 [I; 133] 中所討論的两个变数的情形的一个自然的补充。

我們現在来証明这一节开始时提出的結論。設我們有一个二次型:

$$\varphi=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k \qquad (a_{ik}=a_{ki}),$$

并且 r 是它系数表的秩。我們作 n 个綫性型:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_s}=\sum_{l=1}^{n} a_{sl}x_l \qquad (s=1, 2, \cdots, n)。 \tag{157}$$

在做这些偏微商的表达式时我們用到了 $a_{ik}=a_{ki}$ 这个条件。显然，数 r 在[11]的意义下就是綫性型組(157)的秩。

假定 φ 化成 m 个綫性型:

$$y_s=\beta_{s1}x_1+\beta_{s2}x_2+\cdots+\beta_{sn}x_n \tag{158}$$

的平方和，这就是說，

$$\varphi=\mu_1y_1^2+\mu_2y_2^2+\cdots+\mu_my_m^2, \tag{159}$$

其中 μ_s 不等于零。我們需要証明 $m=r$。利用表达式(159)，我們作綫性型(157):

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_s}=\mu_1\beta_{1s}y_1+\mu_2\beta_{2s}y_2+\cdots+\mu_m\beta_{ms}y_m \qquad (s=1, 2, \cdots, n)。 \tag{157_1}$$

由于綫性型(158)是綫性无关的，所以变数 y_s 可以取任意的数値。因之在确定綫性型(157_1)的綫性关系时 y_s 可以看成自变数，于是(157_1)中綫性型的綫性无关的最大个数就等于系数 $\mu_k\beta_{ki}$ 表的秩，这里列指标 k 取: $k=1, 2, \cdots, m$，行指标 i 取: $i=1, 2, \cdots, n$。这个表每一列的元素都有一个公因子 μ_k，μ_k 不等于零，所以表 $\mu_k\beta_{ki}$ 的秩等

于表 β_{ki} 的秩。由于綫性型組(158)是綫性无关的,这个秩就等于 m,这就是說,在綫性型組(157_1)或者(157)中綫性无关的最大个数等于 m。另一方面,根据假設这个数是 r,从而 $m=r$。

現在来証明,对于把 φ 表成形式(159)的任意表法中,其中 y_s 是实的綫性无关的綫性型,正系数和負系数的个数总是不变的。我們用反証法来証。假定把 φ 表成形式(159)有两种表法,并且它們正系数的个数不同:

$$\left.\begin{array}{l}\varphi=\lambda_1 y_1^2+\cdots+\lambda_p y_p^2-\lambda_{p+1}y_{p+1}^2-\cdots-\lambda_m y_m^2,\\ \varphi=\lambda_1' y_1'^2+\cdots+\lambda_q' y_q'^2-\lambda_{q+1}' y_{q+1}'^2-\cdots-\lambda_m' y_m'^2。\end{array}\right\}\qquad(160)$$

在这里,λ_s 和 λ_s' 都假定是正的。綫性型 $y_1, \cdots, y_m$ 是綫性无关的,$y_1', \cdots, y_m'$ 也是。既然 $p\neq q$,我們总可以假定,譬如說 $p<q$。我們来証明,这个假定将引出矛盾。在綫性型 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 外再添上 $y_m, \cdots, y_n$,使我們有一个完全的綫性无关組[11]。对 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 我們写下面的齐次綫性方程組:

$$y_1=0;\ \cdots;\ y_p=0;\ y_{q+1}'=0;\ \cdots;\ y_m'=0;\ y_{m+1}=0;\ \cdots;\ y_n=0。\qquad(161)$$

其中齐次方程的个数是:

$$p+(m-q)+(n-m)=n-(q-p),$$

因 $p<q$,所以数目小于 n。从而,这个方程組有异于零的实解。取任意一个这样的解:$x_s=x_s^{(0)}$ $(s=1, 2, \cdots, n)$。对 x_s 的这一組值,根据(161)我們有:

$$\varphi=-\lambda_{p+1}y_{p+1}^2-\cdots-\lambda_m y_m^2=\lambda_1' y_1'^2+\cdots+\lambda_q' y_q'^2。$$

由此看出,当 $x_s=x_s^{(0)}$ 时二次型 φ 必須等于零,因而 $x_s=x_s^{(0)}$ 除去方程(161)外还必須适合方程:

$$y_{p+1}=0;\ \cdots;\ y_m=0。$$

最后我們得到,$x_s=x_s^{(0)}$ 使完全的綫性无关組 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 中全部綫性型等于零。但是这是不可能的,因为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的齐次方程組:

$$y_1=0;\ y_2=0;\ \cdots;\ y_n=0$$

的行列式不等于零,这是由于綫性型 y_s 是綫性无关的。我們得出了矛盾,这就証明了慣性律。

36. 雅科比公式 我們来介紹一下雅科比公式,但不証明,它使得化二次型成平方和的化法有一个方便的写法。

为了这个目的我們首先引入一些符号。設:

$$\Delta_i(x)=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k\qquad(i=1, 2, \cdots, n)。$$

$$\Delta_0=1;\ \Delta_1=a_{11};\ \Delta_k=\begin{vmatrix}a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1k}\\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2k}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{k1}, & a_{k2}, & \cdots, & a_{kk}\end{vmatrix}\qquad(k=2, 3, \cdots, n),$$

$$X_1=A_1(x);\ X_k=\begin{vmatrix} a_{11}, & \cdots, & a_{1k-1}, & A_1(x) \\ a_{21}, & \cdots, & a_{2k-1}, & A_2(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1}, & \cdots, & a_{kk-1}, & A_k(x) \end{vmatrix}。$$

如果系数 a_{ik} 的表的秩是 r 并且 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_r$ 不等于零,那么雅科比公式是

$$\varphi=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k^2}{\Delta_k\Delta_{k-1}}, \tag{162}$$

这里綫性型 $X_k(k=1, 2, \cdots, r)$是綫性无关的。这个公式使我們有可能根据 Δ_k 的正負号来确定二次型 φ 对于慣性律来説属于那一种类型。

特别,如果所有的行列式 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$ 全是正的(这里 $r=n$),那么由 (162) 推知,φ 是正定的。逆定理也可以証明,即:如果 φ 是正定的,那上面所説的这些行列式就一定全是正的。在应用公式(162)时,当然 x_s 可以按任意的次序来編号。在編号改变时当然上面的这些行列式 Δ_k 也要改变,矩陣 $|a_{ik}|_1^n$ 中的每一个主子式都是在变数 x_s 的某一种編号时行列式 Δ_k 中的一个。由此推知,正定型 φ 的所有的主子式全是正的,不过这里我們只需要知道行列式

$$\Delta_s(s=1, 2, \cdots, n)$$

全是正的就行了。我們可以証明,二次型 φ 是半正定的充分而必要的条件是所有的主子式是非負的,也就是説,是大于或等于零。这里只看行列式 Δ_s 的正負号是不够的,必須要看全部主子式的正負号。

要二次型 φ 是負定的,充分而必要的条件是滿足不等式 $(-1)^k\Delta_k>0$ $(k=1, 2, \cdots, n)$。要 φ 是負的,充分而必要的条件是主子式的正負号与 $(-1)^k$ 相同(其中 k 是主子式的阶)或等于零。

这一节所説到的这些結果的証明可以在 Ф. P. 甘特馬赫的"矩陣論" (1953) 一书中找到。

37. 同时化两个二次型成平方和 假定我們有了两个二次型:

$$\varphi_1=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k;\quad \varphi_2=\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}x_i x_k.$$

其中 φ_1 是正定的,这就是説,它可以化成 n 个正的平方和。我們要来找一个綫性变換(不一定是正交的),它使这两个二次型同时化成平方和。

首先,我們引进新的变数 y_k,它使 φ_1 变成平方和。这个可以用上面所讲的簡单的办法做到。在新的变数下二次型成下面的

形式：

$$\varphi_1=\sum_{k=1}^{n}\mu_k y_k^2;\quad \varphi_2=\sum_{i,k=1}^{n}b'_{ik}y_i y_k。$$

根据所有的 μ_k 全是正的这个条件，我們可以引入一組新的实变数 $z_k=\sqrt{\mu_k}y_k$。这样一来，我們得到：

$$\varphi_1=\sum_{k=1}^{n}z_k^2;\quad \varphi_2=\sum_{i,k=1}^{n}b''_{ik}z_i z_k。$$

从变数 z_k 我們作一个正交变换变到新的变数 z'_k，它把二次型 φ_2 化成平方和。

这时候因为变换是正交的，φ_1 仍然是平方和，最后我們就把两个二次型都化成了平方和的形式：

$$\varphi_1=\sum_{k=1}^{n}z_k'^2;\quad \varphi_2=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k z_k'^2。$$

数 λ_k 有时叫做二次型 φ_2 相对于二次型 φ_1 的特征值。

現在我們来求这些数 λ_k 所适合的方程，它将和 [32] 中方程 (144) 完全相仿。为了这个目的我們引入二次型的判别式这个概念，这就是：由二次型的系数所組成的行列式叫做二次型的判别式。

假定二次型 φ 的系数矩陣是 A，我們对它施行一个变换：

$$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=B(x'_1,\ x'_2,\ \cdots,\ x'_n)。$$

我們知道[32]新的二次型的矩陣是：

$$C=B^{(*)}AB,$$

按公式它的行列式是：

$$D(C)=D(B^{(*)})D(A)D(B)。$$

显然行列式 $D(B^{(*)})$ 和 $D(B)$ 是相等的，因为其中的一个是由另一个經行列互换得到。因此我們有

$$D(C)=D(A)D(B)^2,$$

这就是說，当二次型經过一綫性变换时，二次型的行列式用由新变

数到旧变数的变换的行列式的平方来乘。

現在我們回到我們的二次型 φ_1 和 φ_2，我們作二次型

$$\omega=\varphi_2-\lambda\varphi_1=\sum_{i,k=1}^{n}(b_{ik}-\lambda a_{ik})x_ix_k,$$

它的系数中含有参数 λ。

在变到新的变数之后，这个二次型成为

$$\omega=\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k-\lambda)z_k'^2$$

于是它的判别式显然在新变数下就是乘积：

$$(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda), \tag{163}$$

而在旧的变数时这个判别式等于元素为 $(b_{ik}-\lambda a_{ik})$ 的行列式。我們已經証明过，这两个判别式只差一个因子，就是变换的行列式的平方，其中不含有 λ。由此卽得，对参数 λ 而言这两个判别式有相同的根。注意到(162)我們看出，数 λ_k 就是下面这个方程的根：

$$\begin{vmatrix} b_{11}-\lambda a_{11}, & b_{12}-\lambda a_{12}, & \cdots, & b_{1n}-\lambda a_{1n} \\ b_{21}-\lambda a_{21}, & b_{22}-\lambda a_{22}, & \cdots, & b_{2n}-\lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1}-\lambda a_{n1}, & b_{n2}-\lambda a_{n2}, & \cdots, & b_{nn}-\lambda a_{nn} \end{vmatrix}=0。$$

38. 微振动　以前在[**II, 19**]中我們看到一个具有 n 个自由度的力学系統，如果系統之間的关系不含有时間，并在一个有势的外力作用下，那么这个系統的运动是由微分方程組：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_k'}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_k}=\frac{\partial U}{\partial q_k}\quad (n=1, 2, \cdots, n), \tag{164}$$

来决定，这里 T 是系統的动能，U 是給定的 q_k 的函数(力函数)，我們假定它不依賴于时間 t。以前我們已經提过，T 是 q_k 对时間的微商 q_k' 的一个二次型

$$T=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}q_i'q_k'\qquad (a_{ki}=a_{ik}), \tag{165}$$

其中系数是 q_k 的已知函数。假定在 $q_k=0$ 时，偏微商

$$\frac{\partial U}{\partial q_k}=0 \text{ 当 } q_1=\cdots=q_n=0\qquad (k=1, 2, \cdots, n)。 \tag{166}$$

这样，微分方程組(164)就有一个显然的解 $q_1=\cdots=q_n=0$，与它对应的是这个系統的一个平衡位置。函数 U 的决定可以差一常数项，因之我們总可以认为当 $q_1=\cdots$

$=q_n=0$ 时它等于零，根据(166)，从而我們可以断定，在函数 U 按 q_k 的冪展开时只从二次項开始。假定由这些二次項所得到的二次型是負定的，那么 U 在 $q_1=\cdots=q_n=0$ 处取极大值，或者就是位能$(-U)$有极小值。在[II, 19]中已經証明过，在这个情况下平衡位置 $q_1=\cdots=q_n=0$ 是稳定的，并且在一个初始的微扰下，这个系統将靠近平衡位置作微振动，使 q_k 在整个运动时間内都保持很小。因而在研究微振动时我們可以认为 U 只含有二次項，这就是說，它是：

$$-U=\sum_{i,k=1}^{n}b_{ik}q_iq_k \quad (b_{ki}=b_{ik})。 \tag{167}$$

同样地，在表达式(165)的系数 a_{ik} 中我們可以近似地假定 $q_k=0$，并且这些系数一直保持这个数值。把这些全代入方程組(164)，我們得到一組 n 个常系数綫性方程：

$$\left.\begin{array}{l}a_{11}q_1''+a_{12}q_2''+\cdots+a_{1n}q_n''+b_{11}q_1+a_{12}q_2+\cdots+b_{1n}q_n=0\\a_{21}q_1''+a_{22}q_2''+\cdots+a_{2n}q_n''+b_{21}q_1+b_{22}q_2+\cdots+b_{2n}q_n=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}q_1''+a_{n2}q_2''+\cdots+a_{nn}q_n''+b_{n1}q_1+b_{n2}q_2+\cdots+b_{nn}q_n=0。\end{array}\right\} \tag{168}$$

如果我們来求出这个方程組的形式为調和振动的解，并且它們具有相同的頻率和初相，而只是振幅不同。

$$q_k=A_k\cos(\lambda t+\varphi) \qquad (k=1, 2, \cdots, n), \tag{169}$$

那么，把它們代入(168)，卽得 A_k 和 λ 的一个方程組：

$$\left.\begin{array}{l}(b_{11}-\lambda^2a_{11})A_1+(b_{12}-\lambda^2a_{12})A_2+\cdots+(b_{1n}-\lambda^2a_{1n})A_n=0\\(b_{21}-\lambda^2a_{21})A_1+(b_{22}-\lambda^2a_{22})A_2+\cdots+(b_{2n}-\lambda^2a_{2n})A_n=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\(b_{n1}-\lambda^2a_{n1})A_1+(b_{n2}-\lambda^2a_{n2})A_2+\cdots+(b_{nn}-\lambda^2a_{nn})A_n=0。\end{array}\right\} \tag{170}$$

要使这个方程組对 A_k 有不全为零的解，它的行列式就必須为零：

$$\begin{vmatrix}b_{11}-\lambda^2a_{11}, & b_{12}-\lambda^2a_{12}, & \cdots, & b_{1n}-\lambda^2a_{1n}\\b_{21}-\lambda^2a_{21}, & b_{22}-\lambda^2a_{22}, & \cdots, & b_{2n}-\lambda^2a_{2n}\\\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\\b_{n1}-\lambda^2a_{n1}, & b_{n2}-\lambda^2a_{n2}, & \cdots, & b_{nn}-\lambda^2a_{nn}\end{vmatrix}=0。 \tag{171}$$

取这个方程的一个根代到方程組(170)的系数中去，我們就得到 A_k 的解，一个或者几个，然后再可以乘上一个任意常数。此外，公式(167)中含有一个任意常数 φ。

如果我們应用二次型的理論，这个問題的解决就更清楚。首先我們注意，根据二次型(165)是表达运动的动能这件事情的本质，它一定是正定的。并且根据問題中所給的条件，二次型(167)也是正定的。我們知道，我們可以引入一組新的变数 p_k，它和旧的 q_k 是由一个常系数的綫性变换来联接，在这組新变数下，二次型 T 和$(-U)$同时化成了平方和，并且 T 的平方項的系数全是 1。同时我們注意，q_k 与 p_k 的綫性关系引出 q_k' 和 p_k' 也有相同的綫性关系。因之我們有：

$$T=\sum_{s=1}^{n}p_s'^2; \quad -U=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s^2p_s^2, \tag{172}$$

这里 p_s^2 的系数全是正的，因而我們有可能把它們表成平方。代替方程組(168)对于新的变数我們可以把拉格朗日方程(164)写成：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p_k'}\right)=\frac{\partial U}{\partial p_k}。$$

用(172)代入，我們得到一个极其簡单的方程組

$$p_k''+\lambda_k^2 p_k=0 \qquad (k=1, 2, \cdots, n)。$$

这个方程組的解是：

$$p_k=C_k\cos(\lambda_k t+\psi_k) \qquad (k=1, 2, \cdots, n), \tag{173}$$

其中 C_k 和 ψ_k 是任意常数。广义坐标 p_k 叫做这个力学系統的主坐标。

原来的坐标 q_k 可以表成 p_k 的常系数的綫性型。由前一节的結果得知，数 λ_k 应該是方程 (170) 的根。应該注意，这些 λ_k 可能有相同的，不过就是在这个情形，公式(169)还是給出我們所考虑的微振动問題的一般解。

39．二次型特征值的极值性质 我們从一个新的观点来看化实二次型成平方和的問題。为了簡单起見我們限制在三个变数的情形

$$\varphi=\sum_{i,k=1}^{3}a_{ik}x_ix_k=\sum_{k=1}^{3}\lambda_k x_k'^2, \tag{174}$$

这里 x_k' 和 x_k 是被一个正交变换联系着

$$\left.\begin{aligned}x_1&=b_{11}x_1'+b_{12}x_2'+b_{13}x_3',\\x_2&=b_{21}x_1'+b_{22}x_2'+b_{23}x_3',\\x_3&=b_{31}x_1'+b_{32}x_2'+b_{33}x_3'。\end{aligned}\right\} \tag{175}$$

为了确定起見，我們假定数 λ_k 是一个比一个小，即

$$\lambda_1>\lambda_2>\lambda_3。 \tag{176}$$

我們的問題就是根据 φ 在单位球面 K 上的值来确定数 λ_k 和系数 b_{ik}，K 就是球心在原点而半徑为 1 的球面

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1 \text{ 或者 } x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2=1。 \tag{177}$$

球面上的每一点都确定空間中的一个方向，就是由从原点到这一点的单位矢量所决定的方向。我們可以把公式(174)写成：

$$\varphi=\lambda_1(x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2)+(\lambda_2-\lambda_1)x_2'^2+(\lambda_3-\lambda_1)x_3'^2,$$

由此看出，在单位球面 K 上我們就有：

$$\varphi=\lambda_1+(\lambda_2-\lambda_1)x_2'^2+(\lambda_3-\lambda_1)x_3'^2。$$

由此直接推出，λ_1 是 φ 在 K 上的极大值。

这个极大值显然是在点

$$x_1'=1;\quad x_2'=x_3'=0$$

达到，或者根据(175)，在原来的坐标系中这个 K 上的点的坐标是：

$$x_1=b_{11};\quad x_2=b_{21};\quad x_3=b_{31}。$$

这个点决定了正交变换(175)第一列的矢量，也就是説，这个矢量是方程

$$Ax=\lambda x \tag{178}$$

当 $\lambda=\lambda_1$ 时的一个解。因而，二次型 (174) 最大的一个特征値等于它在单位球面上的极大値，而对应的特征矢量 $x^{(1)}$，也就是方程(178) 的解，就是由原点到达到这个极大値的一点的矢量。

現在再来确定第二个特征値以及对应的特征矢量。在公式中我們設 $x_1'=0$。与这个方程对应的是通过原点与矢量 $x^{(1)}$ 垂直的平面。这个平面和单位球面的交綫是圆周

$$x_2'^2+x_3'^2=1。$$

在这个圆周上我們有：

$$\varphi=\lambda_2x_2'^2+\lambda_3x_3'^2,$$

由此直接看出，λ_2 就是 φ 在单位球面上对应于和已求到的矢量 $x^{(1)}$ 垂直的矢量的极大値。和以上一样，我們可以証明方程 (178) 当 $\lambda=\lambda_2$ 时的解，也就是特征矢量 $x^{(2)}$，就是由原点到达到这个极大値的一点的矢量。

在有了两个矢量之后，第三个矢量 $x^{(3)}$ 就是和它們两个都垂直的一个矢量，而特征値 λ_3 就是 φ 在这个矢量和球面的交点的値。

假如譬如説 $\lambda_1=\lambda_2$，那么在找二次型在单位球上的第一个极大値时，我們得出的就不是一点，而是整个一个圆周，在它上面达到极大値。

以上的想法很容易推广到任意維数的情形。对于一般的情形我們只引出結果，它和上面是完全一样的。假設我們有了一个 n 个变数的实二次型：

$$\varphi=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}x_ix_k。\tag{179}$$

在实 n 維空間中的单位矢量是由平方和为 1 的 n 个实数的数組表示。我們説，这些矢量的端点在单位球面上，这个单位球面的方程显然就是：

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1。\tag{180}$$

二次型 φ 最大的一个特征値就等于 φ 在单位球面(180)上的极大値，以及对应的特征矢量是由从原点到达到这个极大値的一点的矢量 $x^{(1)}$ 来确定。为了求次大的一个特征値我們来考虑与已求得的矢量 $x^{(1)}$ 垂直的单位矢量。在它們里面我們找到一个 $x^{(2)}$，它給出二次型 φ 的极大値。这个第二个极大値 λ_2 就等于二次型的第二个特征値，而所説的矢量 $x^{(2)}$ 就是对应的特征矢量。現在再来考虑与 $x^{(1)}$ 和 $x^{(2)}$ 垂直的单位矢量，这就相当于在条件(180)上再添加两个条件：

$$x^{(1)}\cdot x=0 \text{ 和 } x^{(2)}\cdot x=0。$$

在这些单位矢量里面找出一个，它也給出二次型的极大値。这个数値就是二次型的按大小排的第三个特征値，而所説的矢量就是对应的特征矢量，余类推。

我們可以把二次型的特征値不是按降序而是升序来排，使第一个特征値是最小的一个，第二个是次小的一个等等。这样一来，我們的問題和以前还是一样的，不过把以

前凡是談到最大値的地方全改成极小値而已。

所有以上的想法还可以推广到同时化两个二次型成平方和的情形。假設有了两个二次型：

$$\varphi=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k;\quad \psi=\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}x_i x_k$$

用綫性变换　　　　$(x_1, x_2, \cdots, x_n)=B(x_1', x_2', \cdots, x_n')$

把它們化成平方和

$$\varphi=\sum_{k=1}^{n} x_k'^2;\quad \psi=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k'^2,$$

这里我們假定数 λ_k 是一个比一个小。

这时 λ_1 是 ψ 在条件

$$\varphi=1$$

下的极大値，并且这个极大値正好在

$$x_1=b_{11};\quad x_2=b_{21};\ \cdots;\ x_n=b_{n1}$$

处达到。

相仿地可以决定其余的特征値。

40. 厄密特矩陣和厄密特型　在前面几节里我們已經討論过实对称矩陣，并且指出它們是厄密特矩陣的特殊情形，厄密特矩陣的元素是适合下面的关系的复数：

$$a_{ki}=\overline{a}_{ik}\text{。}\tag{181}$$

当 $i=k$ 时，这个关系説明对角綫上的元素必須是实数。

厄密特矩陣的定义可以用另一种方式叙述：如果把行列互換，再把所有的元素換成它們的共軛数，厄密特矩陣不变，这就是説，用[26]的符号：

$$\overline{A}^{(*)}=A\ \text{或者}\ \widetilde{A}=A\text{。}\tag{182}$$

我們知道，对任意矩陣 A，矩陣 $\widetilde{A}$ 叫做它的厄密特共軛矩陣。因之厄密特矩陣又可以叫做自共軛矩陣。

以前在[32]中已經証明过，对于任意的矢量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 厄密特矩陣 A 适合关系

$$(A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{y})\text{。}\tag{183}$$

这个关系，和以前的两个一样，也可以作为厄密特矩陣的定

义。

我們再来談一个厄密特矩陣的性质。

設 A 是一个厄密特矩陣，U 是一个任意的 U 矩陣。不难証明，$U^{-1}AU$ 和 A 一样也是一个厄密特矩陣。根据条件 $\overline{A}^{(*)}=A$，我們只需要証明 $U^{-1}AU$ 也有这个性质。在[26]我們有：

$$(\overline{U^{-1}AU})^{(*)}=\overline{U}^{(*)}\overline{A}^{(*)}\overline{U}^{(*)-1}$$

或者，注意到 A 的条件以及 U 是 U 矩陣，从而 $\overline{U}^{(*)}=U^{-1}$，我們得到：

$$(\overline{U^{-1}AU})^{(*)}=U^{-1}AU,$$

証明完毕。

在作一个坐标的 U 变换时，它对于矢量的分量是按下面的公式来作

$$(x_1, \cdots, x_n)=U(x_1', \cdots, x_n'),$$

一个厄密特矩陣 A，如果看作空間綫性变换的一个运算子，在新的坐标下就成为形式 $U^{-1}AU$，因之上面所証明的命題可以叙述为：空間的 U 变换不改变一个看作运算子的矩陣的厄密特性质。

現在我們提出用 U 变换化厄密特矩陣成对角矩陣的問題。

$$U^{-1}AU=[\lambda_1, \cdots, \lambda_n]。\tag{184}$$

和以前对于实对称矩陣一样，我們的問題就相当于解下面这种形式的方程：

$$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x},\tag{185}$$

这里 λ 是数 λ_k 中的一个以及矢量 $\boldsymbol{x}$ 的分量就是矩陣 U 相当的一列的元素。

这些数以及与它們对应的矢量 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 分別叫做矩陣 A 的特征值和特征矢量。

我們知道，特征值一定是下面这个方程的根：

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}-\lambda, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots, & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0。\tag{186}$$

設 $\lambda=\lambda_1$ 是这个方程的一个根并且 $x^{(1)}$ 是方程(185)当 $\lambda=\lambda_1$ 时的一个解。

这个方程是綫性齐次的，它的解可以乘上一个任意常数，因之我們可以假定矢量 $x^{(1)}$ 的长度是1。取这个矢量作为新坐标系的第一个单位矢量，再作 $n-1$ 个长度为1的矢量，以致于我們得到 n 个互相正交而长度为1的矢量。用这些矢量作为新的单位矢量，設 U_1 是轉换到这个新坐标的 U 变换。在新的坐标系下，我們的厄密特矩陣 A 变成了一个新的厄密特矩陣 $A_1=U_1^{-1}AU_1$，并且对应的方程

$$A_1x=\lambda x$$

当 $\lambda=\lambda_1$ 时必須以矢量 $(1, 0, \cdots, 0)$ 作为一个解。和在[33]中一样，这个情况就說明了在矩陣 A_1 中第一行和第一列的元素除去第一行第一列的一个元素是 λ_1 外全是零。

由矩陣 A_1 的厄密特性质直接推知，元素 λ_1 一定是实数，从这里也順便証明了方程(186)的根全是实数，这一点以前已經看到过。于是，矩陣 A_1 就有下面的形式：

$$\begin{Vmatrix} \lambda_1, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & a_{22}^{(1)}, & \cdots, & a_{2n}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & a_{n2}^{(1)}, & \cdots, & a_{nn}^{(1)} \end{Vmatrix},$$

这就是說，它是一个形式为

$$[\lambda_1, C_1]$$

的准对角矩陣，其中 C_1 是一个元素为 $a_{ik}^{(1)}$ 的 $n-1$ 阶的厄密特矩

陣。继續上面的办法，对我們的坐标系保持第一个坐标軸不动再作一个 U 变換 U_2，它把矩陣 C_1 化成相同的形式，即第一行和第一列除去在它們交点上的元素全为零。

上面所說的这个 U 变換可以看作我們整个 n 維空間的一个 U 变換。它是一个准对角矩陣：

$$[1, U_2]。$$

在作了这个变換之后，我們的厄密特矩陣化成了：

$$[1, U_2]^{-1}[\lambda_1, C_1][1, U_2] = [\lambda_1, U_2^{-1}C_1U_2],$$

它还是一个厄密特矩陣，这个矩陣完全写出来就是：

$$\left\|\begin{matrix} \lambda_1, & 0, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & \lambda_2, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & 0, & a_{33}^{(2)}, & \cdots, & a_{3n}^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & a_{n3}^{(2)}, & \cdots, & a_{nn}^{(2)} \end{matrix}\right\|。$$

继續这样做下去，最后我們就把原来的厄密特矩陣化成对角形式，这里和(184)中一样，所要求的那个 U 变換 U 就是所有在化的过程中所連續施行的 U 变換的乘积。

現在我們回到方程(185)。在[33]中我們証明了，它对应于不同的 λ 的值的解一定互相正交。

和[33]中完全一样，我們可以証明，組成矩陣 U 的列的那些矢量以及对应的值 λ 就給出了方程 (185) 全部的解。这里只需要注意一个情形，就是方程(186)有重根的情形。譬如說，如果方程 (186) 有一个重复度为 m 的根 $\lambda=\lambda_1$，那么对于 $\lambda=\lambda_1$ 方程 (185) 就有 m 个綫性无关的解 $x^{(1)}, \cdots, x^{(m)}$。显然它們任意的一个綫性組合也是方程(185)的解，这就是說，方程

$$Ax = \lambda_1 x$$

以矢量 $x^{(1)}, \cdots, x^{(m)}$ 所生成的子空間作为它解的集合，也就是

說，它的解是

$$x=C_1x^{(1)}+\cdots+C_mx^{(m)},$$

其中 $C_1, \cdots, C_m$ 是任意的系数。在这个子空間中我們可以任意地选擇 m 个长度为 1 的互相正交的矢量，以它們作为矩陣 U 中对应于特征值 $\lambda=\lambda_1$ 的諸列。因之，和[33]中的矩陣 B 一样，对于矩陣 U 的选擇有一定的随意性。不但如此，每一个矢量 $x^{(s)}$ 的分量还可以乘上一个数，我們知道，矢量 $x^{(s)}$ 是从方程(185)的一个解乘上一个数使它的长度变成 1 得来的，因之如果再乘上一个絕对值为 1 的数結果还是一样的，这就是說，可以乘 $e^{i\varphi}$ 这样一个数(它叫做相因子)。这样一来，矢量的长度仍然是 1，并且它和其余組成方程(185)的基础解系的矢量仍旧是正交的。最后，在矩陣 U 中我們还可以任意地改变列的次序。显然，这样一种非本质的变换只是改变了新坐标系中坐标軸的編号，因而它只影响了对角矩陣中数 λ_k 的次序。在以后我們將一直假定，这些数是按一个比一个大的次序排列的。

現在我們轉到厄密特型的討論。我們可以說，厄密特矩陣 A 对应于下面这样一个厄密特型。

$$A(x)=(Ax, x)=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\bar{x}_i x_k, \tag{187}$$

这里 $x_1, \cdots, x_n$ 是矢量 x 的分量。以前我們把矩陣 A 看作空間的綫性变换，把它作用到一个矢量 x 上就給出一个新的矢量 x'，我們写成 Ax。在 $A(x)$ 的公式中，最后得出的結果不是矢量，而是一个数。在上面我們已經看到，这个数是一个实数。

現在假定我們在空間里作了一个 U 变换，矢量的旧的分量按公式 $x=Ux'$ 由新的分量表出。在新的坐标下厄密特型(187)成为：

$$(AUx', Ux')。$$

利用 U 变换的性质(125)，对这个数量乘积中的两个矢量，我們可以在左边都乘上 U^{-1}，这样一来，在新坐标下厄密特型(187)就有下面的表达式：

$$(U^{-1}AU\boldsymbol{x}',\ \boldsymbol{x}')。\tag{188}$$

特别地，如果 U 变换 U 把矩陣 A 化成对角形式，这就是說(184)成立，那么在新的坐标下我們的厄密特型就只剩下了 $\bar{x}_i'x_i'$ 这样的項，也就是說，我們把厄密特型化成了平方和：

$$(\boldsymbol{x}', U^{-1}AU\boldsymbol{x}') = \lambda_1\bar{x}_1'x_1' + \lambda_2\bar{x}_2'x_2' + \cdots + \lambda_n\bar{x}_n'x_n'。$$

因此，这里和在[32]中一样，化矩陣 A 成对角形式的問題就相当于化对应的厄密特型成平方和的問題。

代替厄密特型，有时候我們討論所謂双綫性型，它定义为：

$$(A\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\bar{x}_i y_k。$$

如果在空間中也作一个 U 变换，新分量和旧分量的关系还和以前一样，那么在新坐标系下我們得到：

$$(A\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x}) = (AU\boldsymbol{y}',\ U\boldsymbol{x}')$$

或者，根据 U 变换的性质：

$$(U^{-1}AU\boldsymbol{y}',\ \boldsymbol{x}')。$$

最后，如果 U 把 A 化成对角形式，那么在相应的坐标下双綫性型就化成下面这个极其简单的形式：

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\bar{x}_k'y_k'。$$

应該注意，每一个实系数的对角矩陣都是厄密特矩陣，因而 $U^{-1}[\lambda_1, \cdots, \lambda_n]U$ 也是厄密特矩陣，其中 U 是任意的 U 矩陣。在上面我們已經看到，反过来每一个厄密特矩陣也都可以写成这种样子。

和实二次型一样[35]，厄密特型也可以按特征值 λ_k 的正負号来分类。譬如，如果 λ_k 全部是正的，那么厄密特型叫做正定的，它

的特性是，对所有的 x_k，它的值全是正的，只有在 $x_1=\cdots=x_n=0$ 时它才等于零。同样地我們可以定义半定的和不定的厄密特型。完全和实二次型一样，它的討論也是基于公式

$$(A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})=\lambda_1\bar{x}_1'x_1'+\cdots+\lambda_n\bar{x}_n'x_n'。$$

公式 (183) 对厄密特矩陣是对的。如果 A 是任意的矩陣，$\widetilde{A}=\overline{A}^{(*)}$ 是它的共軛矩陣，那么代替 (183) 我們有：

$$(A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\ \widetilde{A}\boldsymbol{y})。\qquad (183_1)$$

如果 a_{ik} 是矩陣 A 的元素，那么矩陣 $\widetilde{A}$ 的元素是 $\{\widetilde{A}\}_{ik}=\bar{a}_{ki}$，把它們直接代入就可以驗算公式 (183_1)，和驗算公式 (183) 一样。

41．可交換的厄密特矩陣　設 A 和 B 是两个厄密特矩陣。我們来考慮，在什么条件下乘积 BA 也是厄密特矩陣。我們作乘积 BA 的厄密特共軛矩陣：

$$\overline{(BA)}^{(*)}=\overline{A}^{(*)}\overline{B}^{(*)}$$

或者，利用 A 和 B 是厄密特矩陣：

$$\overline{(BA)}^{(*)}=AB。$$

要使 BA 是厄密特矩陣，它充分而必要的条件是 AB 等于 BA，这就是說，它們是可交換的。假定厄密特矩陣 A 和 B 用同一个 U 变换化成了对角形式：

$$A=U^{-1}[\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n]U;\ B=U^{-1}[\mu_1,\ \cdots,\ \mu_n]U。$$

不难証明，在这个情形下它們是可交换的

$$AB=BA=U^{-1}[\lambda_1\mu_1,\ \cdots,\ \lambda_n\mu_n]U。$$

現在来証明它的逆定理：如果两个厄密特矩陣是可交換的，那么它們可以用同一个 U 变换同时化成对角形式，这就是說，厄密特矩陣的可交換性，对于它們可以用 U 变换同时化成对角形式来說，不但是必要的而且是充分的条件。我們假定 $AB=BA$。这里我們注意，与它們相似的矩陣也是可交換的。因为

$$(C^{-1}AC)(C^{-1}BC)=C^{-1}ABC=C^{-1}BAC,$$

并且对乘积 $$(C^{-1}BC)(C^{-1}AC)$$
我們得到同样的表达式。

假定 C 是一个 U 变换，它把 A 化成对角形式，并且我們让 B 經过同样的变换。新的矩陣也是可交换的，因之在我們定理的証明中我們无妨假定，矩陣 A 已經是对角形式了，这就是說，元素 a_{ik} 适合条件

$$a_{ik}=0 \text{ 当 } i\neq k。\tag{189}$$

以 b_{ik} 表矩陣 B 的元素，这两个矩陣可交换的条件可以写成

$$\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sk}=\sum_{s=1}^{n} b_{is}a_{sk}$$

对任意 i 和 k。利用(189)，这个条件变成：

$$(a_{ii}-a_{kk})b_{ik}=0 \qquad (i,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)。\tag{190}$$

如果所有的数 a_{ii} 全不同，那么由以上的等式直接推知，$b_{ik}=0$ 当 $i\neq k$，这就是說，矩陣 B 也是对角形式，我們的定理就証明了。

現在来看一般的情形，也就是在数 a_{ii} 中有相同的。为了确定起見，我們假設这些数分成两組，每一組中全是一样的：

$$a_{11}=\cdots=a_{mm};\ a_{m+1,m+1}=\cdots=a_{nn}。$$

由公式(190)可以知道，元素 b_{ik} 只有在 i 和 k 同时大于 m 或同时不大于 m 的情形才可能不为零。因此，在这个情形下，矩陣 B 是准对角形式：

$$B=[B_1,\ B_2],$$

其中 B_1 是一个 m 阶的厄密特矩陣，B_2 是 $(n-m)$ 阶的厄密特矩陣。把 B 完全写出来就是：

$$\left\|\begin{matrix} b_{11}, & \cdots, & b_{mm}, & 0, & \cdots, & 0 \\ b_{m1}, & \cdots, & b_{mm}, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & \cdots, & 0, & b_{m+1,m+1}, & \cdots, & b_{m+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & \cdots, & 0, & b_{n,m+1}, & \cdots, & b_{nn} \end{matrix}\right\|。$$

在不改变 A 的对角形式之下，我們可以在由前 m 个单位矢量所生成的子空間中做任意一个 U 变换，在由后 $n-m$ 个单位矢量所生成的子空間中也做一个 U 变换。我們选擇 U 变换 V_1 和 V_2 把矩陣 B_1 和 B_2 化成对角形式。总的說来，在整个 n 維空間中我們就有一个准对角形式的 U 变换

$$[V_1, V_2]。$$

根据上面所說的，在新的坐标系下，矩陣 A 保持对角形式，而矩陣 B 变成了：

$$[V_1, V_2]^{-1}[B_1, B_2][V_1, V_2]=[V_1^{-1}B_1V_1, V_2^{-1}B_2V_2],$$

这就是說，它也成为对角形式，这就証明了我們的命題。

对两个可交換的矩陣，如果我們作方程

$$Ax=\lambda x;\quad Bx=\mu x, \tag{191}$$

那么由以上的討論直接推出，对这两个方程我們可以找到同一組 n 个綫性无关的解。这些解就給出了矩陣 U 的列，矩陣 U 把这两个矩陣都化成对角形式。換句話說，对两个可交換的厄密特矩陣我們可以找到同一組 n 个綫性无关的特征矢量。至于特征值，也就是参数 λ 和 μ 的值，一般地当然是不相同的。应該注意，由上面所說的并不能推出，所有矩陣 A 的特征矢量都是矩陣 B 的特征矢量，如果 A 和 B 各有 n 个不同的特征值，那么除去可以差一个常数倍数外只有一个矢量对应于每个 λ_k 和 μ_k，那么上面的話当然是对的。但是一般說来，如果特征矢量中有相同的，这一点就不成立了。設 $x^{(k)}$ 是矩陣 A 和 B 的一个特征矢量的完全組，而 λ_k 和 μ_k 是对应的特征值，譬如說，假定，$\lambda_1=\lambda_2$，但 $\mu_1\neq\mu_2$。那么矢量 $C_1x^{(1)}+C_2x^{(2)}$ 对任意的常数 C_1 和 C_2 都是矩陣 A 的特征矢量，但是不是 B 的特征矢量。

上面全部的討論很容易可以搬到多个矩陣的情形，也就是：如果有一些厄密特矩陣 $A_1, \cdots, A_l$，它們經过 U 变換可以同时化成

对角形式的充分而且必要的条件是，它們两两可以交换，这就是說，$A_iA_k=A_kA_i$ 对任意的从 1 到 l 的 i 和 k 成立。

42. 化 U 矩陣成对角形式　对于化成对角形式这一点来說，U 矩陣和厄密特矩陣有完全相仿的性质，这就是說：如果 V 是一个 U 矩陣，那么总能找得到一个 U 矩陣 U 使得矩陣

$$U^{-1}VU$$

是对角形式。我們可以把問題写成下面的样子：

$$VU=U[\lambda_1, \cdots, \lambda_k], \tag{192}$$

其中 U 是所要求的 U 矩陣，λ_k 是所要求的数。

和对于厄密特矩陣一样，相当于矩陣 U 的列的是一些矢量 $\boldsymbol{x}^{(k)}$，这些矢量必須是方程

$$V\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x} \tag{193}$$

的解，其中 λ 等于数 λ_k。和上面一样地，由此直接推知，这些数 λ 必須是特征方程

$$\begin{vmatrix} v_{11}-\lambda, & v_{12}, & \cdots, & v_{1n} \\ v_{21}, & v_{22}-\lambda, & \cdots, & v_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{n1}, & v_{n2}, & \cdots, & v_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0 \tag{194}$$

的根，其中 v_{ik} 是矩陣 V 的元素。

首先我們指出，如果 U_1 和 V_1 是 U 矩陣，那么 $U_1^{-1}V_1U_1$ 也是 U 矩陣。因为从 U_1 是 U 矩陣推出 U_1^{-1} 是 U 矩陣，同时 U 矩陣的乘积还是 U 矩陣。

取方程 (194) 的某一个根 $\lambda=\lambda_1$，代入方程 (193)，我們确定一个适合这个方程的单位矢量 $\boldsymbol{x}^{(1)}$，以它作一个新的坐标矢量，再添上 $(n-1)$ 个单位矢量，使得我們得到 n 个互相正交的单位矢量。由旧坐标轉換到新坐标相当于一个 U 变换 U_1，这样，我們的 U 矩陣 V 就变到了一个相似的矩陣

$$V_1 = U_1^{-1} V U_1。$$

对应的方程 $$V_1 x = \lambda x$$

当 $\lambda=\lambda_1$ 时以矢量$(1, 0, \cdots, 0)$作为一个解，从而推出，矩陣V_1第一列除去第一个元素是λ_1外全是零。但是在U矩陣中每一列元素的模的平方和等于1，因之我們可以断定，数λ_1的模等于1。我們知道，在U矩陣V_1中每一行元素的模的平方和也等于1。上面已經証明了第一行的第一个元素λ_1的模等于1，因之，第一行其余的元素必須全是零。于是，在作了第一个U变换之后，我們已經把这个U矩陣化成了这样的形式，即在它的第一行和第一列除去第一个元素外其余的元素全是零：

$$\begin{Vmatrix} \lambda_1, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & v_{22}^{(1)}, & \cdots, & v_{2n}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & v_{n2}^{(1)}, & \cdots, & v_{nn}^{(1)} \end{Vmatrix}。$$

我們有了和厄密特矩陣完全相仿的情况。进一步我們知道，元素$v_{ik}^{(1)}$組成一$(n-1)$阶的U矩陣。再作一次U变换，我們可以使这个矩陣的第一行和第一列除去第一个元素外其余的元素全是零，而第一个元素的模等于1。总的說来，在做了两个U变换之后，我們的U矩陣变成了：

$$\begin{Vmatrix} \lambda_1, & 0, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & \lambda_2, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & 0, & v_{33}^{(2)}, & \cdots, & v_{3n}^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & v_{n3}^{(2)}, & \cdots, & v_{nn}^{(2)} \end{Vmatrix}。$$

这样一直继續下去，最后我們把我們的U矩陣用U变換化成了对角形式。应該注意，由以上的推理可以知道，U矩陣的特征值的模全部等于1。

和在[41]中一样我們可以証明，如果一些 U 矩陣是两两可交換的，那么用同一个 U 变換可以把它們都化成对角形式。

我們再指出以下这个事实。假設一个 U 矩陣把某一个矩陣 A 化成对角形式，这就是說，$U^{-1}AU$ 是对角矩陣。我們知道，U 的行列式的模是 1，因之我們可以找一个实数 ω 使 U 矩陣 $e^{i\omega}U$ 的行列式等于 1。同时 U 矩陣 $e^{i\omega}U$ 也把矩陣 A 化成对角形式，因为

$$(e^{i\omega}U)^{-1}A(e^{i\omega}U)=e^{i\omega}e^{-i\omega}U^{-1}AU=U^{-1}AU。$$

因此，我們总可以认为化某一个矩陣成对角形式的 U 矩陣的行列式就等于 1。

例 作为化成对角形式的例子，我們来考虑一个三阶的实正交矩陣

$$V=\begin{Vmatrix} v_{11}, & v_{12}, & v_{13} \\ v_{21}, & v_{22}, & v_{23} \\ v_{31}, & v_{32}, & v_{33} \end{Vmatrix}。\tag{195}$$

我們假定这个矩陣的行列式是 $(+1)$，也就是說，对应于这个矩陣的是把三維空間作为一个整体繞原点的一个轉动。根据条件，矩陣 (195) 的特征方程的常数項是 1，因为显然地这个常数項就是矩陣的行列式。在另一方面，我們看出，这个特征方程所有根的模全等于 1。特征方程的首項是 $(-\lambda)^3=-\lambda^3$，因之，方程的常数項，也就是 1，就等于方程根的乘积。由于这个方程是实系数的，只可能有两种情形，就是：这个方程有一个根是 1，另外两个是模为 1 的共軛虚根，这就是說，另外两个根是 $e^{\pm i\varphi}$，或者这个方程有一个根是 1，另外两个根是 (-1)。第二种情形是第一种情形当 $\varphi=\pi$ 时的一个特殊情形。

特征值 $\lambda=1$ 对应一个实矢量 $x^{(1)}$，它是方程

$$Vx^{(1)}=x^{(1)}\tag{196}$$

的解。

換句話說，这个矢量在由矩陣 V 所确定的空間轉动中是不变的。这个矢量因为对应于实值 $\lambda=1$，所以是一个实矢量，它显然决定一根軸，空間就繞这根軸轉动（空間每一个繞原点的轉动都相当于繞一根通过原点的軸的轉动）。为了用矩陣 V 的元素来确定矢量 $x^{(1)}$ 的分量，我們把方程 (196) 改写为：

$$V^{-1}x^{(1)}=x^{(1)},$$

或者，由于 V 是一个实的 U 矩陣，我們可以写：

$$V^{(*)}x^{(1)}=x^{(1)}。$$

从 (196) 减去它，我們得到：

$$(V-V^{(*)})x^{(1)}=0$$

把这个等式完全写出来，并以(u_{11}, u_{21}, u_{31})表示矢量 $x^{(1)}$ 的分量。我們得到方程組：

$$\begin{aligned}
&(v_{12}-v_{21})u_{21}+(v_{13}-v_{31})u_{31}=0\\
(v_{21}-v_{12})u_{11}\quad &+(v_{23}-v_{32})u_{31}=0\\
(v_{31}-v_{13})u_{11}+(v_{32}-v_{23})u_{21}\quad &=0
\end{aligned}$$

由它們立即得出决定轉动軸的方向的公式：

$$u_{11}:u_{21}:u_{31}=(v_{23}-v_{32}):(v_{31}-v_{13}):(v_{12}-v_{21})。$$

另外两个特征矢量 $x^{(2)}$ 和 $x^{(3)}$ 显然必須适合方程

$$Vx^{(2)}=e^{i\varphi}x^{(2)} \quad 和 \quad Vx^{(3)}=e^{-i\varphi}x^{(3)}, \tag{197}$$

它們是复分量的矢量。根据下面的条件我們可以决定 φ，就是，特征方程根的和就等于对角綫上項的和，也就是矩陣 V 的迹：

$$1+e^{-i\varphi}+e^{i\varphi}=1+2\cos\varphi=v_{11}+v_{22}+v_{33},$$

并且可以认为 φ 是在 0 与 π 之間。

由方程(197)推知，由于在方程(197)中 λ 的值是共軛复数，所以我們可以假定矢量 $x^{(2)}$ 和 $x^{(3)}$ 的分量是共軛的。我們作一个新的 U 矩陣：

$$U_0=\begin{Vmatrix} 1, & 0, & 0\\ 0, & \frac{1}{\sqrt{2}}, & \frac{i}{\sqrt{2}}\\ 0, & \frac{1}{\sqrt{2}}, & -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix}。\tag{198}$$

不难証明，矩陣 $W=UU_0$ 諸列的元素就是矢量

$$x^{(1)};\quad \frac{x^{(2)}+x^{(3)}}{\sqrt{2}};\quad i\,\frac{x^{(2)}-x^{(3)}}{\sqrt{2}}$$

的分量，它們都是实数。并且，矩陣 W 因为是两个 U 矩陣的乘积，所以也是一个 U 矩陣，这就是說，W 是正交矩陣。現在对矩陣 V 用实的 U 矩陣 W 作一相似变换。即得：

$$W^{-1}VW=U_0^{-1}U^{-1}VUU_0=U_0^{-1}[1, e^{i\varphi}, e^{-i\varphi}]U_0。$$

实际把这些矩陣乘出来，即得：

$$W^{-1}VW=\begin{Vmatrix} 1, & 0, & 0\\ 0, & \cos\varphi, & -\sin\varphi\\ 0, & \sin\varphi, & \cos\varphi \end{Vmatrix}。\tag{199}$$

我們总可以假定正交矩陣 W 的行列式等于$(+1)$，否則的話我們用(-1)乘这个矩陣，这样并不影响关系式(199)。因之，对应于矩陣 W 的也是空間的某一个运动。矩陣(199)，它是經过坐标变换 $x=Wx'$ 之后所得到的与矩陣 V 相似的矩陣，它在新坐标下給出了一个和矩陣 V 在原来的坐标下給出的变换相同的变换。由矩陣(199)的形式

直接推出，与矩陣(199)对应的是繞新軸 $x'^{(1)}$ 轉角度 φ 的一个轉动，而我們所作的变换的实质就是取上面所説的这个由矢量 $x^{(1)}$ 表示的轉动軸作为新軸 $x'^{(1)}$。

由以上的討論还可以推知一个重要的事实，即：所有对应于空間轉一个一定的角度 φ 的轉动的矩陣全可以用相似变换(对不同的矩陣用不同的变换)变到同一个形状(199)，从而，全部这样的矩陣都彼此相似。

对应于不同轉动角的矩陣是不可能相似的，因为这样的矩陣的特征值 1，$e^{i\varphi}$ 和 $e^{-i\varphi}$ 对于不同的 φ 是不同的。全部这些性质都有极其簡单的几何意义。

43. 投影矩陣 现在我們来討論厄密特矩陣的一种特殊情形。設 R_m 是一由 m 个綫性无关的矢量 $\boldsymbol{y}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{y}^{(m)}$ 所生成的 m 維子空間。这个子空間 R_m 是形式为

$$C_1\boldsymbol{y}^{(1)}+C_2\boldsymbol{y}^{(2)}+\cdots+C_m\boldsymbol{y}^{(m)}$$

的所有矢量的集合，其中 C_k 是任意的数。把矢量 $\boldsymbol{y}^{(k)}$ 正交化，我們可以做出 m 个互相正交的单位矢量

$$x^{(1)}, \cdots, x^{(m)},$$

它們生成同一个子空間 R_m。再做 $(n-m)$ 个单位矢量

$$x^{(m+1)}, \cdots, x^{(n)},$$

我們可以把它們补充成为一 n 个互相正交的单位矢量的完全組。

矢量 $x^{(m+1)}, \cdots, x^{(n)}$ 生成一个 $(n-m)$ 維的子空間 R'_{n-m}，并且在下面的意义下子空間 R_n 和 R'_{n-m} 是互相正交的，这就是子空間 R_m 中任一矢量与子空間 R'_{n-m} 中任一矢量正交[14]。把任意一个矢量 x 分解成：

$$x=x_1x^{(1)}+\cdots+x_nx^{(n)}, \tag{200}$$

我們可以把它表成两个矢量的和：

$$x=[x_1x^{(1)}+\cdots+x_mx^{(m)}]+[x_{m+1}x^{(m+1)}+\cdots+x_nx^{(n)}]=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \tag{201}$$

其中第一个属于 R_m，而第二个属于 R'_{n-m}。不难証明，对任意一个矢量 x 这种分解成两部分的分法是唯一的。事实上，假設除去分解(201)之外，还有第二种分解 $x=\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{v}'$，它也有上面所説的性质。那么

$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{v}' \quad 或者 \quad \boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}'=\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v}。$$

左边的矢量属于 R_m，而右边的矢量属于 R'_{n-m}，因之，$\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}'$ 和 $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}'$ 必須是正交的。

但是每一个矢量，如果和它自身正交的話，显然要等于零[14]，因而 $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}'=0$，这就是説，$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}'$，而 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'$，也就是説，矢量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 是被 x 唯一地决定。矢量 $\boldsymbol{u}$ 叫做矢量 x 到子空間 R_m 的投影。表示这个由矢量 x 到矢量 $\boldsymbol{u}$ 的轉换的矩陣叫做到子空間 R_m 的投影矩陣，用 P_{R_m} 代表。这个矩陣的形式当然是依賴于坐标軸的选擇。

如果我們取 $x^{(k)}$ 作为基础单位矢量，那么 x 由公式(201)表示，而矢量 $\boldsymbol{u}$ 則由公式

$$u=x_1x^{(1)}+\cdots+x_mx^{(m)},$$

表示，在这个情况下，投影这个运算簡单地就是让前 m 个分量保持不变，而让其余的分量为零。对应的投影矩陣显然是一个形式为

$$P_{R_m}=[1,1,\cdots,1,0,0,\cdots,0]$$

的对角矩陣，其中前 m 个是1，而其余的是零。如果我們把坐标軸換一种編号，那么就只是改变了这些元素的次序，和以上一样还是一个由1和0組成的对角矩陣。在一般的情形，对任意的笛卡尔坐标系投影矩陣是：

$$P_{R_m}=U^{-1}[1,\cdots,1,0,\cdots,0]U,\tag{202}$$

这里 U 是某一个 U 矩陣，P_{R_m} 的特征值等于1或者0。反过来，每一个这种形式的厄密特矩陣都是到某一个子空間的投影矩陣，这个子空間的維数就等于 P_{R_m} 的等于1的特征值的个数。

还可以用另一种方式来定义投影矩陣，就是：投影矩陣是适合关系式

$$P^2=P\tag{203}$$

的一个厄密特矩陣。

事实上，注意到 $1^2=1$，$0^2=0$，我們不难驗算，形式为(202)的矩陣滿足关系式(203)。反过来，如果一个厄密特矩陣适合关系式(203)，并且把它化成：

$$P=U^{-1}[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n]U,$$

那么根据(203)：

$$U^{-1}[\lambda_1^2,\cdots,\lambda_n^2]U=U^{-1}[\lambda_1,\cdots,\lambda_n]U,$$

这就是說，$\lambda_k^2=\lambda_k\ (k=1,2,\cdots,n)$，由此立即推出，$\lambda_k=1$ 或 0。如果一个矩陣的特征值全等于1，那么这个矩陣就是单位矩陣，与之对应的是恒等变换，换句話說，这就是矢量到整个空間的投影(每个矢量都不变)。把这个不重要的情形除外，投影矩陣至少有一个特征值等于零，因之这个矩陣的行列式，等于特征值的乘积，也就等于零，当然我們就不能談到逆矩陣 P^{-1}。再注意一点，由定义可以直接推出，投影矩陣 P_{R_m} 不改变属于 R_m 的矢量，它縮短不属于 R_m 的矢量的长度。

在有了这个准备知識之后，我們現在来討論一些关于投影矩陣的运算。假設我們有了两个投影矩陣 P_R 和 P_S，它們的乘积为零，这就是說，是一个元素全为零的矩陣：

$$P_SP_R=0。\tag{204}$$

在子空間 R 中取一个矢量 x 使得 $P_Rx=x$。由公式(204)：

$$P_Sx=0。$$

由此可以推出，x 和子空間 S 中任意一个矢量正交。因为，否則我們在子空間 S 中就可以找到一个单位矢量 y 它不和 x 正交，那么就用它做第一个坐标矢量，这样，x 的第一个分量不等于零，把 x 投影到 S 时这个分量是不变的。因此我們看到，如果条件(204)滿足，則 R 的每一个矢量和 S 的每一个矢量正交，并且反过来也成立。与

(204)同时我們就有：

$$P_RP_S=0。\tag{205}$$

事实上，对任意的矢量 $\boldsymbol{y}$，矢量 $P_S\boldsymbol{y}$ 属于 S，因而它和 R 的每一个矢量正交，这就是説，对每一个矢量 $\boldsymbol{y}$ 我們都有：

$$P_RP_S\boldsymbol{y}=0,$$

这就相当于(205)。反过来，如果两个子空間 R 和 S 在上面所説的意义下是正交的話，那么(204)和(205)成立。

現在我們来考虑两个投影矩陣的和：

$$P=P_R+P_S\tag{206}$$

并且假定它們适合条件(204)和(205)。矩陣(206)显然是一个厄密特矩陣，我們要証明它也是一个投影矩陣。为了这个目的我們来証明它的平方等于它自己

$$P^2=(P_R+P_S)(P_R+P_S)=P_R^2+P_RP_S+P_SP_R+P_S^2,$$

从这里，根据上面的条件以及 P_R 和 P_S 都是投影矩陣，得：

$$P^2=P_R+P_S=P。$$

不难証明，在这个情形下，与矩陣 P 对应的就是到子空間$(R+S)$的投影，子空間$(R+S)$是子空間 R 和 S 的和，意思就是，$(R+S)$是由生成 R 的矢量和生成 S 的矢量合在一起所生成的子空間，这就是説，如果矢量 $\boldsymbol{x}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{x}^{(p)}$ 生成 R，$\boldsymbol{y}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{y}^{(q)}$ 生成 S，那么$(R+S)$是所有下面这种矢量的集合：

$$C_1\boldsymbol{x}^{(1)}+\cdots+C_p\boldsymbol{x}^{(p)}+D_1\boldsymbol{y}^{(1)}+\cdots+D_q\boldsymbol{y}^{(q)},$$

其中 C_k 和 D_k 是任意常数。上面这个性质可以推广到任意多个項的和：

$$P=P_{S_1}+\cdots+P_{S_m}。\tag{207}$$

如果子空間 S_k 是两两互相正交，这就是説，对不同的 i 和 j，S_i 的任一个矢量和 S_j 的任一个矢量正交，那么和(207)是到子空間$(S_1+\cdots+S_m)$的投影矩陣，$(S_1+\cdots+S_m)$是由生成子空間 S_k 的全部矢量合在一起所生成的子空間。在特殊的情形，这个和可能等于单位矩陣

$$I=P_{S_1}+\cdots+P_{S_m},$$

在这个情形，通常我們把它叫做把单位分解为投影矩陣，或者簡单地就叫做单位的分解。

我們再来考虑两个投影矩陣的乘积

$$P=P_SP_R。\tag{208}$$

要使这个乘积也是投影矩陣，首先这个乘积就必須是厄密特矩陣，而这一点在[41]中已經知道，我們的矩陣必須是可交换的

$$P_RP_S=P_SP_R。\tag{209}$$

我們来証明，这个条件同时也是充分的，这就是説，在这个情形下矩陣的平方 P^2 就

等于矩陣 P:

$$P^2=P_SP_RP_SP_R$$

或者，利用条件(209)把矩陣交換:

$$P^2=P_S^2P_R^2=P_SP_R,$$

这正是我們要証明的。不难驗証，在矩陣交换的条件(209)之下与矩陣(208)对应的是到这样一个子空間的投影，这个子空間是由所有 R 和 S 共同有的矢量所組成的。

我們再指出一个結果，不过不予証明，虽然証明起来也没有什么困难，这个結果是如果子空間 S 是子空間 R 的一部分，那么差

$$P=P_R-P_S \tag{210}$$

也是一个投影矩陣。如果 $x^{(k)}$ 是生成 S 的基础矢量，那么在这些矢量之外再添上一个或者几个綫性无关的矢量，我們就可以得到生成 R 的基础矢量。后添上去的这一些矢量本身生成某一个子空間 T，在这个情形，矩陣(210)就是到这个子空間的投影矩陣。

利用投影矩陣，化厄密特矩陣成对角形式的問題，就是在有着相同特征値的情形，也可以完全确定地把它說出来。

譬如說，假設，我們有一个厄密特矩陣

$$A=U[\lambda_1, \cdots, \lambda_n]U^{-1},$$

其中 U 是一个 U 矩陣。为了确定起見，我們假定 λ_k 分成两組，每一組所包含的特征値是相等的，并且前 m 个数等于 μ，而其余的 $(n-m)$ 个等于 ν:

$$A=U[\mu, \cdots, \mu, \nu, \cdots, \nu]U^{-1}。$$

显然，我們可以把它改写成:

$$A=\mu U[1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0]U^{-1}+\nu U[0, \cdots, 0, 1, \cdots, 1]U^{-1}。$$

我們来考虑投影矩陣

$$P_R=U[1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0]U^{-1};\quad P_S=U[0, \cdots, 0, 1, \cdots, 1]U^{-1}。$$

对应的子空間 R 和 S 显然是互相正交的，同时这两个投影矩陣的和是单位矩陣。因此在这个情形下我們有:

$$A=\mu P_R+\nu P_S,$$

其中 $$\lambda_1=\cdots=\lambda_m=\mu,\quad \lambda_{m+1}=\cdots=\lambda_n=\nu。$$

在一般的情形，化厄密特矩陣成对角形式的問題就归結到单位的分解

$$I=P_{S_1}+\cdots+P_{S_m}, \tag{211}$$

它使我們的矩陣 A 可以表成:

$$A=\mu_1P_{S_1}+\cdots+\mu_mP_{S_m}, \tag{212}$$

其中 μ_k 是矩陣 A 不同的特征値。这样一来，每一个厄密特矩陣都对应一个一定的单位的分解(211)，它使这个矩陣表成(212)的形式。

不难把所有上面的結果不用矩陣，而用厄密特型的話来説。每一个元素为 p_{ik} 的投影矩陣 P_R 都对应一个厄密特型

$$P_R(x)=(P_R x,\ x)=\sum_{i,k=1}^{n} p_{ik}\bar{x}_i x_k, \tag{213}$$

它有时候叫做单一型(Особая форма)。如果对应的子空間 R 是 m 維的，我們取 R 中的 m 个长度为 1 而又互相正交的矢量作为前 m 个基础矢量，那么在这个坐标系下，我們的厄密特型(213)成为：

$$(P_R x',\ x')=\bar{x}'_1 x'_1+\bar{x}'_2 x'_2+\cdots+\bar{x}'_m x'_m。$$

再者，如果矩陣 P_{S_k} 是一个单位的分解，如(211)，那么从每一个子空間 S_k 中取出互相正交的单位矢量作为基础矢量，显然我們就有：

$$\sum_{k=1}^{m} P_{S_k}(x')=\sum_{i=1}^{n} \bar{x}'_i x'_i,$$

因而，对任意坐标軸的选擇，和

$$\sum_{k=1}^{m} P_{S_k}(x)$$

都表示矢量长度的平方。因之我們可以説，化厄密特型 A 成平方和的問題就相当于下面这两个等式：

$$A(x)=\sum_{k=1}^{m} \mu_k P_{S_k}(x), \tag{214}$$

$$|x|^2=\sum_{k=1}^{m} P_{S_k}(x)。 \tag{215}$$

这样一来，在引入投影矩陣之后，化厄密特矩陣成对角形式的問題就可以不用坐标軸的特殊的选擇而叙述出来。同时，这样就使我們有可能把以前的結果，加以适当的改变，引伸到无限維空間的情形，它是近代量子力学中数学方法上的一个基本問題。这一点等到以后再仔細談。到无限維空間的这个推广已經超出了代数的范圍，它主要地是引入分析的工具。

44. 矩陣的函数 矩陣也可以作为某一些函数的元。在这里我們只討論最簡单的函数，也就是矩陣的多項式和有理分式。在討論过复变数函数論之后，我們对矩陣函数的理論将作更詳尽的研究。一个变量矩陣 A 的 n 次多項式 $f(A)$ 是：

$$f(A)=c_0+c_1A+\cdots+c_mA^m, \tag{216}$$

这里 c_k 是数値系数。在这个情形下，函数的値也是一个矩陣，显然，它的元素是由下面的公式表达：

$$\{f(A)\}_{ik}=c_0\delta_{ik}+c_1\{A\}_{ik}+\cdots+c_m\{A^m\}_{ik},$$

这里 $\delta_{ik}=0$ 当 $i\neq k$, $\delta_{ii}=1$。

我們也可以討論几个矩陣的多項式,不过必須注意到这些矩陣对乘法的非交換性。两个变量矩陣 A 和 B 的一般的二次多項式是:

$$f(A, B)=c_0+c_1A+c_2B+c_3A^2+c_4B^2+c_5AB+c_6BA。$$

在公式 (216) 中把矩陣 A 換成一个和它相似的矩陣 $U^{-1}AU$。注意到 $(U^{-1}AU)^k=U^{-1}A^kU$,我們就有:

$$f(U^{-1}AU)=c_0+c_1U^{-1}AU+\cdots+c_mU^{-1}A^mU=$$
$$=U^{-1}(c_0+c_1A+\cdots+c_mA^m)U,$$

这就是說

$$f(U^{-1}AU)=U^{-1}f(A)U。\tag{217}$$

对多个矩陣的多項式有相仿的公式

$$f(U^{-1}AU, U^{-1}BU)=U^{-1}f(A, B)U。\tag{218}$$

現在我們比較仔細地来看一下厄密特矩陣的情形。如果 A 是一个厄密特矩陣,那么直接由定义可以推知,任何正整数方次 A^k,以及乘积 cA, c 是一个实数,也都是厄密特矩陣。由此直接推出,如果在公式 (216) 中 A 是一个厄密特矩陣并且系数 c_k 都是实数,那么函数值 $f(A)$ 是厄密特矩陣。显然,这个厄密特矩陣 $f(A)$ 和 A 是交換的,并且它們可以同时用 U 变換化成对角形式。首先我們注意,如果在函数(216)中 A 的地位代入一个对角矩陣 $[\lambda_1, \cdots, \lambda_n]$,那么得出的結果显然也是一个对角矩陣

$$\sum_{k=0}^{m} c_k[\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k]=[f(\lambda_1), \cdots, f(\lambda_n)],\tag{219}$$

这里 $f(\lambda_k)$ 是我們的多項式在 A 的地位用数 λ_k 代入所得出的值。

現在我們假定, V 是一个 U 变換,它把矩陣 A 化成对角形式

$$A=V[\lambda_1, \cdots, \lambda_n]V^{-1}。$$

根据(217)和(219)我們就有:

$$f(A)=V[f(\lambda_1),\cdots,f(\lambda_n)]V^{-1},$$

这就是說，V 也把 $f(A)$ 化成对角形式，并且 $f(\lambda_k)$ 就是矩陣 $f(A)$ 的特征值。

我們現在来討論有理分式。設 $f_1(A)$ 和 $f_2(A)$ 是矩陣 A 的两个多項式。我們来考慮它們的商

$$\frac{f_1(A)}{f_2(A)}。\tag{220}$$

在以上我們知道，一般說来，两个矩陣的商沒有确定的值[26]，不过在这个情形下，不难証明，只要矩陣 $f_2(A)$ 的行列式不个零，商(220)有一个确定的值。商(220)可以有两种写法：

$$f_1(A)f_2(A)^{-1}\ \text{或者}\ f_2(A)^{-1}f_1(A)。$$

我們来証明，这两个乘积是相等的，

$$f_1(A)f_2(A)^{-1}=f_2(A)^{-1}f_1(A),$$

或者，就相当于

$$f_2(A)f_1(A)=f_1(A)f_2(A)。\tag{221}$$

因为我們的多項式只含有一个矩陣 A，所以它們是可交換的，这就是說，(221)的确成立，从而商(220)有确定的值。进一步不难験算，在一个矩陣的情形，有理分式的乘法和平常的分式是一样的。因为

$$\frac{f_1(A)}{f_2(A)}\cdot\frac{f_3(A)}{f_4(A)}=f_1(A)f_2(A)^{-1}f_3(A)f_4(A)^{-1}$$

或者，注意到交換性：

$$\frac{f_1(A)}{f_2(A)}\cdot\frac{f_3(A)}{f_4(A)}=f_1(A)f_3(A)[f_2(A)f_4(A)]^{-1}=$$

$$=\frac{f_1(A)f_3(A)}{f_2(A)f_4(A)}。$$

作为一个例子，我們来討論下面这个有理分式：

$$U=\frac{1+iA}{1-iA},\tag{222}$$

这里 A 是一个厄密特矩陣，卽 $\overline{A}^{(*)}=A$。很容易証明，U 是一个 U 矩陣，卽

$$\overline{U}^{(*)}=U^{-1}。 \tag{223}$$

事实上，我們有：

$$\overline{U}=\frac{1-i\overline{A}}{1+i\overline{A}}=(1-i\overline{A})(1+i\overline{A})^{-1},$$

把它变成轉置矩陣，卽得[26]：

$$\overline{U}^{(*)}=(1+i\overline{A})^{(*)-1}(1-i\overline{A})^{(*)}=(1+i\overline{A}^{(*)})^{-1}(1-i\overline{A}^{(*)}),$$

由于 $\overline{A}^{(*)}=A$，得：

$$\overline{U}^{(*)}=(1+iA)^{-1}(1-iA)=\frac{1-iA}{1+iA}=U^{-1},$$

这就是說，(223) 是适合的，U 确实是一个 U 矩陣。

我們可以把公式 (223) 写成：

$$U(1-iA)=(1+iA),$$

并且根据 (222)，U 和 A 是交換的，則

$$A=-i\frac{U-1}{U+1}。 \tag{224}$$

完全和上面一样，我們可以証明，如果 U 是一个 U 矩陣并且矩陣 $U+1$ 的行列式不为零，那么由公式 (224) 决定的 A 是一个厄密特矩陣。这样一来，每一个 $D(U+1)\neq 0$ 的 U 矩陣都可以由一个厄密特矩陣 A 按公式 (222) 来表示。

45. 无限維空間 我們現在来引进无限維空間的概念。在这以前我們得先談一下关于复变数极限的概念。假定复变数 $z=x+iy$ 相继地取下列的值：

$$z_1=x_1+y_1i;\ z_2=x_2+y_2i;\ \cdots;\ z_n=x_n+y_ni;\ \cdots \tag{225}$$

我們說，复数 $\alpha=a+bi$ 是数列 (225) 的极限，假如当 n 无限增大时，差 $(\alpha-z_n)$ 的模趋向于零，这就是說，当 $n\to\infty$ 时 $|\alpha-z_n|\to 0$，我們写为 $\alpha=\lim z_n$ 或者 $z_n\to\alpha$。但是

$$|\alpha-z_n|=|(a-x_n)+(b-y_n)i|=\sqrt{(a-x_n)^2+(b-y_n)^2}。$$

由于根号里的两項都是非負的，所以条件 $|\alpha-z_n|\to 0$ 相当于两个条件：$x_n\to a$ 和 $y_n\to b$。因而

$$x_n+y_ni\to a+bi \tag{226}$$

就相当于 $x_n\to a$ 和 $y_n\to b$。我們来考慮复数項的級数：

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_ki)。\tag{227}$$

它叫做收斂的，假如前 n 項的和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_ki)=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)i$$

趋向于极限：当 n 无限增大时 $S_n\to a+bi$，并且这个极限 $a+bi$ 就叫做級数的和。由极限的定义推知，級数(227)的收斂相当于下列两个級数

$$a=\sum_{k=1}^{\infty}a_k \quad 和 \quad b=\sum_{k=1}^{\infty}b_k \tag{228}$$

的收斂，它們是由級数(227)的实数部分和虛数部分分别組成的。

假定由級数(227)的各項的模組成的級数

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k+ib_k|=\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{a_k^2+b_k^2} \tag{229}$$

收斂。根据不等式

$$|a_k|\leqslant\sqrt{a_k^2+b_k^2} \quad 和 \quad |b_k|\leqslant\sqrt{a_k^2+b_k^2}, \tag{230}$$

就知道 (228) 的两个級数收斂，并且是絕对收斂，从而級数(227)也收斂，这就是說，如果級数(229)收斂，则級数(227)也一定收斂。在这个情形下，級数(227)称为絕对收斂。应用平常的勾犀判别法，我們可以把絕对收斂的充分必要条件叙述为：对任意小的正数 ε 总存在一个 N，使

$$\sum_{k=n}^{n+p}|a_k+ib_k|<\varepsilon, \tag{231}$$

只要 $n>N$，p 是任意的正整数。

現在我們把上面所說的应用到一些特殊的情形，这些特殊的情形在以后是很重要的。我們来考虑級数：

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \beta_k, \tag{232}$$

这里 α_k 和 β_k 是复数，对于它們我們假定級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \text{ 和 } \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^2 \tag{233}$$

是收斂的。应用[29]中証明过的不等式

$$\left\{\sum_{k=n}^{n+p} |\alpha_k \beta_k|\right\}^2 \leqslant \sum_{k=n}^{n+p} |\alpha_k|^2 \cdot \sum_{k=n}^{n+p} |\beta_k|^2。$$

注意到級数(233)是收斂的，我們就得到，当 n 足够大时，对任意的 p，和

$$\sum_{k=n}^{n+p} |\alpha_k \beta_k|$$

可以尽量的小，这就是說，級数(233)的收斂就保証了級数(232)的絕对收斂。

現在来考虑級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k + \beta_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k + \beta_k)(\bar{\alpha}_k + \bar{\beta}_k), \tag{234}$$

并且仍然假定，級数(233)是收斂的。級数(234)可以表成下列四个級数的和：

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2; \ \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^2; \ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \bar{\beta}_k; \ \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\alpha}_k \beta_k。$$

前两个根据条件是收斂的，由上面所証明的結論，后两个級数也是收斂的，这就是說，級数(233)的收斂保証了級数(234)的收斂。

現在我們轉入无限維空間的討論。一个无限多个复数的有序集合

$$\boldsymbol{x}(x_1, x_2, \cdots)$$

就叫做这样一个空間的矢量，这里我們始終假定这些数要滿足一

个条件，即級数

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2 \tag{235}$$

必須是一个收斂級数。所以这些矢量的集合通常叫做希勒柏特空間，希勒柏特是第一个研究这种空間的。以下为了簡便計我們就叫它空間 H。

和以前一样，对空間 H 的矢量我們要引入数量乘法和矢量加法这两个基本运算。如果 x_k 是 $\boldsymbol{x}$ 的分量，那么 $c\boldsymbol{x}$ 的分量等于 cx_k，这里 c 是一个复数。如果 x_k 和 y_k 分别是 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的分量，那么 $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$ 的分量等于 (x_k+y_k)。差 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ 是 $\boldsymbol{x}$ 和 $(-1)\boldsymbol{y}$ 的和（参看[**12**]）。旣然級数(235)是收斂的，那么显然級数 $\sum_{x=1}^{\infty}|cx_k|^2$ 也是收斂的。同样地，如果級数

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2 \text{ 和 } \sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^2$$

是收斂的，那由上面所說的可以推出，級数

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^2$$

也是收斂的，这就是說，如果 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 属于 H，那么数列 $(cx_1, cx_2, \cdots)$ 和 $(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots)$ 就定义了 H 中的矢量 $c\boldsymbol{x}$ 和 $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$。零矢量是所有分量全为零的矢量。在矢量等式中它常常就用数的零来表示。

矢量的运算适合通常的規則（参看[**12**]）：

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x};\quad (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z});$$

$$(a+b)\boldsymbol{x}=a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{x};\quad a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=a\boldsymbol{x}+a\boldsymbol{y};\quad a(b\boldsymbol{x})=(ab)\boldsymbol{x}。$$

根据以上所証明的，同样地，对于空間中的两个矢量我們可以作它們的数量乘积：

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\bar{y}_k$$

和

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})=\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2 \tag{236}$$

定义作矢量长度的平方，或者换种説法，是矢量 $\boldsymbol{x}$ 模的平方。对于它我們引入下面的記号：

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2=\|\boldsymbol{x}\|^2。 \tag{237}$$

对于所有的矢量，模总是正的，除非是零矢量，零矢量的模等于零。两个矢量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$，如果它們的数量乘积为零，就叫做互相正交或者简单地就叫做正交，这就是説，$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=0$，和 $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})=0$，这两个等式中的任一个可以从另一个推出。和有限維空間一样，这里的数量乘积也适合一些基本規律。特别地，下面的不等式成立：

$$|(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\|, \tag{238}$$

并且，完全和在[30]中一样，由它可以推出三角形不等式

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|。 \tag{239}$$

如果矢量 $\boldsymbol{x}^{(k)}(k=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 是两两正交，也就是説，$(\boldsymbol{x}^{(i)},\ \boldsymbol{x}^{(j)})=0$ 当 $i\neq j$，那么我們显然有：

$$(\boldsymbol{x}^{(1)}+\cdots+\boldsymbol{x}^{(m)},\ \boldsymbol{x}^{(1)}+\cdots+\boldsymbol{x}^{(m)})=$$
$$=(\boldsymbol{x}^{(1)},\ \boldsymbol{x}^{(1)})+\cdots+(\boldsymbol{x}^{(m)},\ \boldsymbol{x}^{(m)}),$$

或者，这就是

$$\|\boldsymbol{x}^{(1)}+\cdots+\boldsymbol{x}^{(m)}\|^2=\|\boldsymbol{x}^{(1)}\|^2+\cdots+\|\boldsymbol{x}^{(m)}\|^2, \tag{240}$$

这就是説，两两正交的矢量和的模的平方等于它們分别的模的平方和。这个命題可以叫做商高定理。由模的定义直接可以推出，如果 c 是任意一个复数，那么对于矢量 $c\boldsymbol{x}$ 的模我們有：

$$\|c\boldsymbol{x}\|=|c|\,\|\boldsymbol{x}\|。$$

如果矢量 $\boldsymbol{z}^{(1)},\ \boldsymbol{z}^{(2)},\ \cdots,\ \boldsymbol{z}^{(m)}$，是两两正交并且它們的模都等于1，这就是説，

$$(z^{(p)},\ z^{(q)})=0 \text{ 当 } p\neq q$$
$$(z^{(p)},\ z^{(p)})=1,$$

那么公式(240)給出：

$$\|c_1z^{(1)}+\cdots+c_mz^{(m)}\|^2=|c_1|^2+\cdots+|c_m|^2,$$

这里 c_s 是任意的复数。

在我們的空間 H 中，有一組基础矢量是

$$a^{(1)}(1,\ 0,\ 0,\ \cdots);\ \ a^{(2)}(0,\ 1,\ 0,\ \cdots);\cdots$$

矢量 $a^{(k)}$ 的长度都是 1，并且是两两正交的。矢量 x 的分量 x_k 可以表成数量乘积的形式：

$$x_k=(x,\ a^{(k)})。$$

再考虑任意一組 m 个两两正交的矢量，它們每一个的长度都是 1

$$z^{(k)}\qquad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ m)。$$

数量乘积 $(x,\ z^{(k)})$ 叫做矢量 x 在軸 $z^{(k)}$ 上的投影。所取的矢量 $z^{(k)}$ 对我們的空間 H 不构成一个完全的坐标軸組，于是和

$$\sum_{k=1}^{m}(x,\ z^{(k)})z^{(k)}$$

一般說来是不等于矢量 x。把矢量 x 表成：

$$x=\sum_{k=1}^{m}(x,\ z^{(k)})z^{(k)}+u。\tag{241}$$

等式的两边乘上 $z^{(l)}$，并注意到 $z^{(k)}$ 是长度为 1 而且两两正交，我們就得到：

$$(x,\ z^{(l)})=(x,\ z^{(l)})+(u,\ z^{(l)}),$$

这就是說，$(u,\ z^{(l)})=0$，或者，換句話說，矢量 u 和所有的矢量 $z^{(k)}$ 正交。因此我們可以应用商高定理到和(241)

$$\|x\|^2=\sum_{k=1}^{m}|(x,\ z^{(k)})|^2+\|u\|^2,$$

从而得出不等式

$$\|x\|^2 \geqslant \sum_{k=1}^{m} |(x, z^{(k)})|^2, \tag{242}$$

它叫做貝塞尔不等式。它可以叙述为：一矢量在任意一組长度为1而又两两正交的矢量上的投影的模的平方和不超过这个矢量本身长度的平方。在公式(242)中等号成立当而且仅当，在公式(241)中矢量 u 等于零，也就是說，它的分量全是零。

46. 矢量的收斂 現在我們来闡明变矢量的极限这个概念。假設我們有了一个矢量序列 $v^{(k)}$，这里 k 取 1, 2, 3, …。

我們以 $v_1^{(k)}$, $v_2^{(k)}$, … 代表矢量 $v^{(k)}$ 的分量。我們說，矢量 $v^{(k)}$ 趋向矢量 v 作为极限，如果

$$\|v - v^{(k)}\| \to 0, \text{ 也就是 } \|v - v^{(k)}\|^2 \to 0。 \tag{243}$$

以 v_1, v_2, … 代表矢量 v 的分量，我們可以把条件(243)写得更明白些：

$$\lim_{k\to\infty}[|v_1 - v_1^{(k)}|^2 + |v_2 - v_2^{(k)}|^2 + \cdots] = 0。 \tag{244}$$

既然一些正項的和要趋向于零，当然每一項也要趋向于零，这就是說，由条件(244)直接推知，

$$|v_m - v_m^{(k)}| \to 0 \text{ 当 } k \to \infty \quad (m = 1, 2, \cdots), \tag{245}$$

这就是說，每一个分量 $v_m^{(k)}$ 必須趋向于相当的分量 v_m，或者，說得更确切一些，$v_m^{(k)}$ 的实数和虚数部分趋向于 v_m 的实数和虚数部分。应該注意，反过来說是不对的，这就是說，由条件(245)推不出条件(244)。作为一个例子我們假定，矢量 $v^{(k)}$ 是 $(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$，其中第 k 个位置是1。当 k 无限增大时，每一个分量都要变成零，这就是說，对任意的 m 我們有 $v_m^{(k)} \to 0$，也就是說，$v_m = 0 (m = 1, 2, \cdots)$，但是和(244)却始終保持等于1。

如果序列 $v^{(k)}$ 趋向于 v，我們写成 $v^{(k)} \Rightarrow v$。我們再来看一个收斂的例子。我們定义矢量 $v^{(k)}$ 为：矢量 $v^{(k)}$ 前面的 k 个分量和 v 的一样，而其余的分量等于零，这就是說：

$$\boldsymbol{v}^{(k)}(v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_k,\ 0,\ 0,\ \cdots)。$$

不难証明，$\boldsymbol{v}^{(k)} \Rightarrow \boldsymbol{v}$。因为在这个情形

$$\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^{(k)}\|^2=\sum_{n=k+1}^{\infty}|v_n|^2,$$

由于一般項为 $|v_n|^2$ 的級数是收斂的，所以当 k 无限增大时上面的和趋向于零。我們来指出一些关于极限概念的簡单的法則。如果 $\boldsymbol{u}^{(k)} \Rightarrow \boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}^{(k)} \Rightarrow \boldsymbol{v}$, 那么

$$\boldsymbol{u}^{(k)}+\boldsymbol{v}^{(k)} \Rightarrow \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v},\quad (\boldsymbol{u}^{(k)},\ \boldsymbol{v}^{(k)}) \to (\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})。$$

应該注意，因为数量乘积是复数，所以在后面一个公式中我們用 $\to$ 而不用 $\Rightarrow$。可以說，这个公式表示了数量乘积的連續性。根据 (239)，我們有：

$$\|(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})-(\boldsymbol{u}^{(k)}+\boldsymbol{v}^{(k)})\|=$$
$$=\|(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^{(k)})+(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^{(k)})\|\leqslant\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^{(k)}\|+\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^{(k)}\|,$$

并且根据极限的定义，$\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^{(k)}\|\to 0$, $\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^{(k)}\|\to 0$。由上面的不等式即得

$$\|(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})-(\boldsymbol{u}^{(k)}+\boldsymbol{v}^{(k)})\|\to 0,$$

这就是說，确实 $\boldsymbol{u}^{(k)}+\boldsymbol{v}^{(k)} \Rightarrow \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$。再者，由极限的定义，有

$$\boldsymbol{u}^{(k)}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{s}^{(k)};\quad \boldsymbol{v}^{(k)}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{t}^{(k)},$$

其中 $\|\boldsymbol{s}^{(k)}\|\to 0$ 和 $\|\boldsymbol{t}^{(k)}\|\to 0$。对于数量乘积我們有：

$$(\boldsymbol{u}^{(k)},\ \boldsymbol{v}^{(k)})=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{s}^{(k)},\ \boldsymbol{v}+\boldsymbol{t}^{(k)})=$$
$$=(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})+(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{t}^{(k)})+(\boldsymbol{s}^{(k)},\ \boldsymbol{v})+(\boldsymbol{s}^{(k)},\ \boldsymbol{t}^{(k)}),$$

从而

$$|(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})-(\boldsymbol{u}^{(k)},\ \boldsymbol{v}^{(k)})|\leqslant|(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{t}^{(k)})|+|(\boldsymbol{s}^{(k)},\ \boldsymbol{v})|+|(\boldsymbol{s}^{(k)},\boldsymbol{t}^{(k)})|,$$

或者，根据 (238)：

$$|(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})-(\boldsymbol{u}^{(k)},\ \boldsymbol{v}^{(k)})|\leqslant\|\boldsymbol{u}\|\cdot\|\boldsymbol{t}^{(k)}\|+\|\boldsymbol{s}^{(k)}\|\cdot\|\boldsymbol{v}\|+\|\boldsymbol{s}^{(k)}\|\cdot\|\boldsymbol{t}^{(k)}\|。$$

右边部分趋向于零，所以

$$|(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})-(\boldsymbol{u}^{(k)},\ \boldsymbol{v}^{(k)})|\to 0\ \text{这就是}\ (\boldsymbol{u}^{(k)},\ \boldsymbol{v}^{(k)})\to(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})。$$

特别地 $(\boldsymbol{u}^{(k)}, \boldsymbol{u}^{(k)}) \to (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$，这就是說，$\|\boldsymbol{u}^{(k)}\|^2 \to \|\boldsymbol{u}\|^2$ 或者 $\|\boldsymbol{u}^{(k)}\| \to \|\boldsymbol{u}\|$。

不难証明，如果复数序列 c_k 以 c 为极限，那么 $c_k\boldsymbol{u}^{(k)} \Rightarrow c\boldsymbol{u}$。

对于极限的存在也有一个由通常的勾犀判别法所表示的充分与必要的条件。我們来叙述这个判别法。假設有了一矢量序列

$$\boldsymbol{v}^{(k)} \qquad (k=1, 2, \cdots)。 \tag{246}$$

这个序列有极限的充分而且必要的条件是：对于任意小的正数 ε 都存在一个 N，使

$$\|\boldsymbol{v}^{(n)}-\boldsymbol{v}^{(m)}\|<\varepsilon, \tag{247}$$

只要 n 和 $m>N$。

首先我們来証明它是一个必要条件。假設序列 (246) 有极限 $\boldsymbol{v}$。这样，我們可以写

$$\boldsymbol{v}^{(n)}-\boldsymbol{v}^{(m)}=(\boldsymbol{v}^{(n)}-\boldsymbol{v})+(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^{(m)}),$$

由三角形不等式卽得

$$\|\boldsymbol{v}^{(n)}-\boldsymbol{v}^{(m)}\| \leqslant \|\boldsymbol{v}^{(n)}-\boldsymbol{v}\|+\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^{(m)}\|。$$

由极限的定义直接推知，右边的两項当 n 和 m 增大时趋向于零，从而左边也必須趋向于零，这就是說，在这个情形下条件(247)一定滿足。現在我們再来証明条件 (247) 的充分性。假定条件是适合的，我們来証明序列 (246) 趋向于极限。可以把条件 (247) 明白地写成：

$$\sum_{s=1}^{\infty} |v_s^{(n)}-v_s^{(m)}|^2<\varepsilon^2 \text{ 当 } n \text{ 和 } m>N, \tag{248}$$

这里 $v_s^{(j)}$ 是 $\boldsymbol{v}^{(j)}$ 的分量。由此直接推出，对任意的 s 我們有：

$$|v_s^{(n)}-v_s^{(m)}|<s \text{ 当 } n \text{ 和 } m>N$$

或者，把它分成实数和虛数部分：

$$v_s^{(n)}=\alpha_s^{(n)}+i\beta_s^{(n)},$$

我們可以写成：

$$|\alpha_s^{(n)}-\alpha_s^{(m)}|<\varepsilon \text{ 和 } |\beta_s^{(n)}-\beta_s^{(m)}|<\varepsilon \text{。}$$

应用通常的勾犀判别法，我們可以断定，$\alpha_s^{(n)}$ 和 $\beta_s^{(n)}$ 有极限 α_s 和 β_s，从而 $v_s^{(n)}$ 有极限 $\alpha_s+i\beta_s$。我們以 v_s 表这个极限，首先来証明，級数 $\sum_{s=1}^{\infty}|v_s|^2$ 收斂，这就是說，v_s 是某一个矢量的分量。在和(248)中取前面有限多項，当 $n\to\infty$ 时让这有限多項的和趋向极限，我們就得到：

$$\sum_{s=1}^{M}|v_s-v_s^{(m)}|^2\leqslant\varepsilon^2,$$

这里 M 是任意一个正整数。当 $M\to\infty$ 时再让这个不等式趋向于极限，我們得到：

$$\sum_{s=1}^{\infty}|v_s-v_s^{(m)}|^2\leqslant\varepsilon^2, \tag{249}$$

从而推出，数 $v_s-v_s^{(m)}$ 构成某一矢量的分量。数 $v_s^{(m)}$ 是一矢量的分量，因而我們可以断定它們的和，也就是数 v_s，是一矢量的分量。因之，这些数是某一个矢量 $\boldsymbol{v}$ 的分量，并且不等式(249)可以写成：

$$\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^{(m)}\|<\varepsilon,$$

当 $m>N$，这就是說，$\boldsymbol{v}^{(m)}\Rightarrow\boldsymbol{v}$，从而序列(246)确实有极限。显然矢量 $\boldsymbol{v}$ 的每一个分量 v_s 都是 $v_s^{(m)}$ 的极限，由此直接推出，这个极限只有一个。現在我們来考虑矢量的无穷的和

$$\boldsymbol{u}^{(1)}+\boldsymbol{u}^{(2)}+\cdots\text{。} \tag{250}$$

如果前 n 項的和

$$\boldsymbol{s}^{(n)}=\boldsymbol{u}^{(1)}+\cdots+\boldsymbol{u}^{(n)}$$

当 $n\to\infty$ 在上面的意义下有极限，这个和就称为收斂的。根据勾犀判别法，收斂的充分与必要的条件是满足不等式

$$\|\boldsymbol{s}^{(n+p)}-\boldsymbol{s}^{(n)}\|=\|\boldsymbol{u}^{(n+1)}+\cdots+\boldsymbol{u}^{(n+p)}\|\leqslant\varepsilon \tag{251}$$

当 $n>N$，对任意的 p。

注意到数量乘积的連續性，我們有：

$$(x, u^{(1)}+u^{(2)}+\cdots)=(x, u^{(1)})+(x, u^{(2)})+\cdots$$

$$(u^{(1)}+u^{(2)}+\cdots, x)=(u^{(1)}, x)+(u^{(2)}, x)+\cdots。$$

把它們应用到矢量 $u^{(k)}$ 是两两正交的情形，我們就有：

$$(u^{(1)}+u^{(2)}+\cdots, u^{(1)}+u^{(2)}+\cdots)=(u^{(1)}, u^{(1)})+(u^{(2)}, u^{(2)})+\cdots$$

或者 $$\|u^{(1)}+u^{(2)}+\cdots\|^2=\|u^{(1)}\|^2+\|u^{(2)}\|^2+\cdots,$$

这就是說，对于无限多个两两正交的矢量的和的情形，商高定理也成立。

当級数(250)是由两两正交的矢量所組成，我們現在来建立一个它收斂的充分和必要的条件。根据勾犀判别法，我們作表达式(251)，利用商高定理，它等于

$$\|u^{(n+1)}\|^2+\cdots+\|u^{(n+p)}\|^2。$$

由此直接推出，級数收斂的充分必要条件是，由矢量 $u^{(k)}$ 的模的平方所組成的級数收斂。这个結果可以用另外的話来說，即：設 $x^{(k)}$ 是长度为 1 而又两两正交的矢量。作級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k x^{(k)}, \tag{252}$$

这里 C_k 是一些数。根据上面所証明的，这个級数收斂的充分必要条件是級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2$$

收斂。

由此順便推出，在級数(252)中各項的重新排列不破坏它的收斂性。同时也不难証明，各項的重新排列不改变級数(252)的和。

47. 完全正交矢量組　現在我們来闡述完全正交矢量組这一个重要的概念。和有限維的情形一样，可以証明，任意有限多个两两正交的矢量是綫性无关的。在 n 維空間中我們看到，任何 n 个綫性无关的矢量組成一完全組，也就是說，任意的矢量都可以由这

n 个綫性无关的矢量的綫性組合表示。在空間 H 中，由于維数是无限的，我們对完全性沒有一个这样簡单的判别法。以下我們只用到两两正交而又長度为 1 的矢量。

假設我們有了一个无限的两两正交而又長度为 1 的矢量的集合 $\boldsymbol{x}^{(k)}(k=1, 2, \cdots)$，$\boldsymbol{y}$ 是空間 H 中的一个矢量。和在有限多个矢量的情形一样，我們作这个矢量在这些軸上投影的和

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}^{(k)})\boldsymbol{x}^{(k)}。\tag{253}$$

上面我們已經証明过，对任意 m 个矢量下面的这个不等式成立：

$$\sum_{k=1}^{m}|(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}^{(k)})|^2\leqslant\|\boldsymbol{y}\|^2,$$

取极限即得

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}^{(k)})|^2\leqslant\|\boldsymbol{y}\|^2,\tag{254}$$

左边的級数必然是收斂的。根据上一小节的結果，由此直接推出，級数(253)也是收斂的。設

$$\boldsymbol{y}=\sum_{k=1}^{\infty}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}^{(k)})\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{u}。\tag{255}$$

和在[**45**]中一样，不难証明，矢量 $\boldsymbol{u}$ 和所有的矢量 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 正交，因而按商高定理：

$$\|\boldsymbol{y}\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}^{(k)})|^2+\|\boldsymbol{u}\|^2。\tag{256}$$

由此即得，如果在公式(255)中矢量 $\boldsymbol{u}$ 不等于零，那么在公式(254)中取 $<$ 号，如果矢量 $\boldsymbol{u}$ 等于零(这就是說，它的分量全部是零)，那么在公式(254)中 $=$ 号成立。

如果对于空間 H 中任一矢量公式(254)都取 $=$ 号，矢量組 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 就叫做*完全的*。在这个情形，显然任一矢量都可以按这个完全的基础矢量組分解

$$y=\sum_{k=1}^{\infty}(x^{(k)},\ y)x^{(k)}。\tag{257}$$

完全組有时候也称为封閉的，而公式

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(y,\ x^{(k)})|^2=\|y\|^2\tag{258}$$

叫做封閉性方程。我們来証明公式(258)的一个推論，它叫做广义的封閉性方程。假設我們有两个矢量 y 和 z，并設 $x^{(k)}$ 組成一完全組，对 y 和 z 有：

$$y=\sum_{k=1}^{\infty}(y,\ x^{(k)})x^{(k)};\quad z=\sum_{k=1}^{\infty}(z,\ x^{(k)})x^{(k)}。\tag{259}$$

对矢量 $y+z$ 和 $y+iz$ 应用公式(258)，即得：

$$\sum_{k=1}^{\infty}[(y,\ x^{(k)})+(z,\ x^{(k)})][\overline{(y,\ x^{(k)})}+\overline{(z,\ x^{(k)})}]=$$

$$=(y+z,\ y+z),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}[(y,x^{(k)})+i(z,x^{(k)})][\overline{(y,\ x^{(k)})}-i\overline{(z,\ x^{(k)})}]=$$

$$=(y+iz,\ y+iz)。$$

利用 y 和 z 的封閉性方程，得：

$$\sum_{k=1}^{\infty}(y,\ x^{(k)})\overline{(z,\ x^{(k)})}+\sum_{k=1}^{\infty}(z,\ x^{(k)})\overline{(y,\ x^{(k)})}=(y,\ z)+(z,\ y)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(y,\ x^{(k)})\overline{(z,\ x^{(k)})}-\sum_{k=1}^{\infty}(z,\ x^{(k)})\overline{(y,\ x^{(k)})}=(y,\ z)-(z,\ y),$$

由此推出广义封閉性方程：

$$\sum_{k=1}^{\infty}(y,\ x^{(k)})\overline{(z,\ x^{(k)})}=(y,\ z)。\tag{260}$$

如果 y 等于 z，这个公式就变成了(258)。

現在我們更詳細地来討論基础矢量 $x^{(k)}$。以 $x_s^{(k)}(s=1,\ 2,\ \cdots)$ 来代表矢量 $x^{(k)}$ 的分量。根据 $x^{(k)}$ 是长度为1并且是互相正交的，对于这些分量我們有等式：

$$\sum_{s=1}^{\infty}x_s^{(p)}\overline{x}_s^{(q)}=\delta_{pq},\tag{261}$$

这里 $\delta_{pq}=0$ 当 $p\neq q$, $\delta_{pp}=1$。

現在我們来闡明 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 成为一完全矢量組所要适合的条件。为了这一点，我們考慮矢量 $\boldsymbol{y}^{(l)}$，它第 l 个分量是 1，而其余的分量是零。我們有：

$$(\boldsymbol{y}^{(l)},\ \boldsymbol{x}^{(k)})=x_l^{(k)},$$

并且公式(258)給出：

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_l^{(k)}|^2=1 \qquad (l=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)。$$

現在应用 (260) 到矢量 $\boldsymbol{y}^{(p)}$ 和 $\boldsymbol{y}^{(q)}$, $p\neq q$, 并注意到它們是正交的，我們又得到下面的条件：

$$\sum_{k=1}^{\infty}x_p^{(k)}\overline{x}_q^{(k)}=0 \qquad (p\neq q),$$

这就是說，一般地

$$\sum_{k=1}^{\infty}x_p^{(k)}\overline{x}_q^{(k)}=\delta_{pq}。 \tag{262}$$

我們把矢量 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 的分量写成一个无限矩陣的形式：

$$\left.\begin{matrix} x_1^{(1)}, & x_1^{(2)}, & x_1^{(3)}, & \cdots \\ x_2^{(1)}, & x_2^{(2)}, & x_2^{(3)}, & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix}\right\} \tag{263}$$

表达矢量 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 是长度为 1 而又互相正交，等式 (261) 就相当于說这个矩陣的列是互相正交而且是正則化了的。条件 (262) 指出，要使矢量 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 組成一完全組，这个矩陣的行也必須是互相正交而且是正則化了的。

現在我們来証明，条件 (262) 中 $p=q$ 的那一部分对完全性已經是充分的了。因为，如果当 $p=q$ 时这个条件滿足，那么对于矢量

$$\boldsymbol{y}^{(l)}(0,\ \cdots,\ 0,\ \overset{(l)}{1},\ 0,\ \cdots)$$

封閉性公式就成立，并且所有这些矢量全可以由矢量 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 綫性表

示:

$$y^{(l)}=\sum_{k=1}^{\infty}c_k^{(l)}x^{(k)}。$$

我們来証明,对任意的矢量 z 这个等式都成立,我們以 $z^{(l)}$ 代表前 l 个分量与 z 相同而其余的分量为零的矢量。显然我們有:

$$z^{(l)}=z_1y^{(l)}+\cdots+z_ly^{(l)},$$

由于 $y^{(m)}$ 可以由 $x^{(k)}$ 綫性表示,所以对于 $z^{(l)}$ 也可以这样说:

$$z^{(l)}=\sum_{k=1}^{\infty}d_k^{(l)}x^{(k)}。$$

让等式两边和 $x^{(k)}$ 作数量乘积,对于系数 $d_k^{(l)}$ 就得到平常的表达式:

$$d_k^{(l)}=(z^{(l)},\ x^{(k)})。$$

在另一方面,如我們以上看到的,

$$z=\sum_{k=1}^{\infty}d_kx^{(k)}+u, \tag{264}$$

这里 u 和所有的 $x^{(k)}$ 正交。我們来考虑差

$$z-z^{(l)}=\sum_{k=1}^{\infty}(d_k-d_k^{(l)})x^{(k)}+u。$$

按商高定理:

$$\|z-z^{(l)}\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\|d_k-d_k^{(l)}\|^2+\|u\|^2,$$

从而

$$\|u\|^2\leqslant\|z-z^{(l)}\|^2。$$

矢量 u 不依赖于 l, 而我們知道[**46**],右边这一部分当 $l\to\infty$ 时趋向于零。由此立卽推出, $u=0$, 因而公式 (264) 給出任意的矢量 z 按 $x^{(k)}$ 的分解:

$$z=\sum_{k=1}^{\infty}d_kx^{(k)};\quad [d_k=x^{(k)}\cdot z]。 \tag{265}$$

因之对任意的矢量封閉性方程都成立。最終的結果可以叙述如下。为了使长度为 1 而又互相正交的矢量 $x^{(k)}$ 組成一完全(封

閉)組，充分而又必要的条件是，矩陣(263)每一行元素的模的平方和等于1。当矩陣(263)滿足这个条件时，它的行的正交性也自然成立。

48. 无限多个变数的綫性变換　我們簡单地来討論一下无限多个变数的綫性变換：

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{266}$$

或者

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}, \tag{267}$$

这里 A 是一个元素为 a_{ik} 的无限矩陣。首先我們要提出这样的条件，使得在等式(266)右边的无穷級数对于空間 H 中任意的矢量 $\boldsymbol{x}$ 都是收斂的。

我們知道，如果級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 \quad (i=1,\ 2,\ \cdots)$$

对所有的 i 都是收斂的，那么上面的条件适合。可以証明，这个条件不但是充分而且是必要的。如果这个条件不适合的話，那么等式(266)右边的級数就不是对整个空間 H 都收斂，而只对它的一部分。

很自然地我們也要提出这样的条件，就是如果 x_k 是某一个矢量的分量，那么在什么条件下，变換(266)所得出的結果 x_k' 就一定也是空間 H 中某一个矢量的分量，这就是說，只要級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$$

收斂，級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k'|^2$$

一定也收斂。

如果矩陣 A 滿足上面所說的这两个条件，与之相应的变换 A 就叫做有界变换。这个名詞的意义在于，对这样的变换我們可以証明有一个正数 M 存在，使

$$\|\boldsymbol{x}'\|^2 \leqslant M \|\boldsymbol{x}\|^2, \tag{268}$$

或者完全写出来就是：

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k'|^2 \leqslant M \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2。 \tag{269}$$

我們来討論一种特殊的綫性变换。考虑綫性变换

$$\left.\begin{array}{l} x_1' = u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \cdots \\ x_2' = u_{21}x_1 + u_{22}x_2 + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{270}$$

并且我們总是假定，級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_{ik}|^2$$

对所有的 i 都收斂。我們考虑分量为：$\overline{u}_{k1}$, $\overline{u}_{k2}$, $\cdots$ 的矢量 $\boldsymbol{u}^{(k)}$，并假定矢量 $\boldsymbol{u}^{(k)}$ 組成一完全的长度为 1 而又互相正交的矢量組。如我們上面所証明的，这就等于說，表 u_{ik} 的行和列都是正交而且是正則化了的，也就是

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{s=1}^{\infty} u_{sp}\overline{u}_{sq} = \delta_{pq}; \\ \sum\limits_{s=1}^{\infty} u_{ps}\overline{u}_{qs} = \delta_{pq}。 \end{array}\right\} \tag{271}$$

在这个情形下，相当的变换 (270) 叫做 U 变换。

等式 (270) 可以写成：

$$\left.\begin{array}{l} (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u}^{(1)}) = x_1' \\ (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u}^{(2)}) = x_2' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{272}$$

封閉性公式告訴我們：

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k'|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2,$$

这就是說，和有限維的情形一样，U 变換不改变矢量的长度，在公式(268)中我們可以取 $M=1$。

不难从方程(270)中解出 x_k，这就給出(270)的逆变換。利用矢量組 $\boldsymbol{u}^{(k)}$ 的完全性，对于矢量 $\boldsymbol{x}$ 由等式(272)我們得到下面的表达式：

$$\boldsymbol{x}=x_1'\boldsymbol{u}^{(1)}+x_2'\boldsymbol{u}^{(2)}+\cdots \tag{273}$$

或者

$$\left.\begin{array}{l} x_1=\bar{u}_{11}x_1'+\bar{u}_{21}x_2'+\cdots \\ x_2=\bar{u}_{12}x_1'+\bar{u}_{22}x_2'+\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{274}$$

換句話說，如果方程組(270)有解，那么它的解就一定由公式(273)或者(274)表达。在这里，应該注意，我們所談到的只是这样的解 x_k，它們模的平方和是收斂的。現在来証明，公式(273)确实是給出了問題的解答，根据条件，由給定的数 x_k' 的模的平方所組成的級数是收斂的。我們知道，由此可以推出級数(273)的收斂性，因为 $\boldsymbol{u}^{(k)}$ 是长度为1而又两两正交的矢量。对于这个級数的和我們有：

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u}^{(k)})=(x_1'\boldsymbol{u}^{(1)}+x_2'\boldsymbol{u}^{(2)}+\cdots,\ \boldsymbol{u}^{(k)})=x_k',$$

这就是說，这个級数的和的确适合方程組(270)。公式(274)指出，一个 U 变換的逆变換是由行列互換然后再把元素換成共軛数得出，也就是說，这里和有限維的情形是完全相仿的。

在一般的情形，甚至于是有界矩陣的情形，关于逆矩陣以及化矩陣成对角形的問題表現出很大的困难，所得到的結果，严格說来，是不与有限維空間的相仿，在第五卷中将对由无限矩陣表示的綫性变換作更詳尽的討論。这里我們只限于指出一些結果。对于系数 a_{ik} 可以指出一个充分必要条件，它使公式(266)給出一个有界变換。条件是这样：存在一个正数 N，对于任意的正整数 k 和

任意的数 x_s $(s=1, 2, \cdots)$ 适合下面的不等式:

$$\left|\sum_{n,m=1}^{k} a_{nm}x_m\bar{x}_n\right| \leqslant N\sum_{m=1}^{k}|x_m|^2。$$

还可以証明下面这个对于有界变换(266)簡单的充分条件:存在一个正数 l (不依賴于 m 和 n),适合不等式:

$$\sum_{m=1}^{\infty}|a_{nm}| \leqslant l; \quad \sum_{n=1}^{\infty}|a_{nm}| \leqslant l。$$
$$(n=1, 2, \cdots) \qquad (m=1, 2, \cdots)$$

如果矩陣 A 定义一个有界变换,那么存在唯一的一个矩陣 $\tilde{A}$,对于任意的 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 都适合等式

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \tilde{A}\boldsymbol{y}),$$

矩陣 $\tilde{A}$ 的元素 $\tilde{a}_{ik}$ 由公式 $\tilde{a}_{ik}=\bar{a}_{ki}$ 决定。如果 $\tilde{A}$ 等于 A 即 $a_{ik}=\bar{a}_{ki}$,那么有界变换(266)叫做厄密特或者自共軛变换。

对于有界变换下面的公式成立:

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_{nm}x_m\right)\bar{y}_n = \sum_{m=1}^{\infty}x_m\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_{nm}\bar{y}_n\right) =$$
$$= \lim_{\substack{k\to\infty \\ l\to\infty}}\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{l}a_{nm}x_m\bar{y}_n。$$

我們要指出有界变换的一个重要的特殊情形,也就是下面这个二重級数收斂的情形

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}|a_{nm}|^2。 \tag{275}$$

在这个情形,二重級数

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}a_{nm}x_m\bar{y}_n$$

对于任意的矢量 $\boldsymbol{x}(x_1, x_2, \cdots)$ 和 $\boldsymbol{y}(y_1, y_2, \cdots)$ 是絕对收斂。如果除去級数(275)收斂外我們还有 $a_{ik}=\bar{a}_{ki}$,那么就有可能利用 U 变换化厄密特型成平方和

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}a_{nm}x_m\bar{y}_n = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k z_k\bar{z}_k,$$

这里矢量 $z(z_1, z_2, \cdots)$ 是由矢量 $x(x_1, x_2, \cdots)$ 經过一个 U 变换得到的：$z=Ux$。这里，当 $k\to\infty$ 时 $\lambda_p\to 0$。如果 A 和 B 是两个表示有界变换的无限矩陣，那么連續施行这两个变换的結果仍然是一个有界变换，它的系数按通常的公式确定：

$$\{BA\}_{tk}=\sum_{s=1}^{\infty}\{B\}_{ts}\{A\}_{sk}。$$

还要指出，如果 A 是有界变换的矩陣，并且矢量序列 $x^{(k)}$ 有极限 x，这就是說，$x^{(k)}\Rightarrow x$，那么 $Ax^{(k)}\Rightarrow Ax$。

在应用到数学物理时非有界綫性变换也是极其重要的。它在第五卷将要討論到。

49. 函数空間　我們已經討論了空間 H，在那里面矢量是被由整数編号的无限多个分量所定义的：第一个分量是 x_1，第二个是 x_2 等等：現在我們要来考虑函数空間 F，在这里面，矢量是一个变数或者多个变数的函数，变数是連續地变动的。

我們来考虑一个函数 $f(x)$，它定义在区間 $a\leqslant x\leqslant b$ 上。这样一个函数可以看作一个矢量，区間中的每一个数 x_0 都对应一个数 $f(x_0)$，它給出这个矢量在 x_0 处的分量。在这个情形下，作为分量指标的变数 x 連續地取区間 $a\leqslant x\leqslant b$ 中所有的值，按前面的說法，矢量 $f(x)$ 的分量是一个連續的集合。按前面的說法，数值 x_0 相当于坐标軸的編号，而函数值 $f(x_0)$ 相当于对应分量的值。在这里，我們假定函数值 $f(x)$ 既可以取实数也可以取复数，不过对于自变数的变动区間 $a\leqslant x\leqslant b$ 我們总是假定是实数軸上的一个有限区間。

为了确定起見，現在我們将考虑复函数 $f(x)=f_1(x)+if_2(x)$，它定义在有限区間 $a\leqslant x\leqslant b$ 上并且是連續的。

这样的函数，和空間 H 中的矢量一样，既可以相加也可以用一个复数去乘。得出来的仍然是連續函数。在模和数量乘积的定

义中我們必須以积分来代替和。数量乘积按下面的公式定义:

$$[\varphi(x), \psi(x)]=\int_a^b \varphi(x)\overline{\psi(x)}dx \tag{276}$$

以及模的平方:

$$\|f(x)\|^2=[f(x), f(x)]=\int_a^b |f(x)|^2dx。 \tag{277}$$

設函数組 $\varphi_k(x)$ $(k=1, 2, \cdots)$ 組成一长度为 1 而又两两正交的矢量組,这就是說

$$\int_a^b \varphi_p(x)\overline{\varphi_q(x)}dx=\delta_{pq}。 \tag{278}$$

以前我們已經討論过这种正則的和正交的函数系 [**II, 148**],这里我們只打算提起一些与前面直接有关的結果。和 [**II, 148**] 中唯一不同的一点是,現在所考虑的函数可以取复数值。

設函数 $\varphi_k(x)$ 組成一正則正交函数系, $f(x)$ 是一个函数(矢量)。我們来考虑 $f(x)$ 的富里哀系数,或者用現在所用的名詞,矢量 $f(x)$ 在函数空間坐标軸上的投影,坐标軸是由函数 $\varphi_k(x)$ 表示的:

$$a_k=[f(x)\cdot\varphi_k(x)]=\int_a^b f(x)\overline{\varphi_k(x)}dx。 \tag{279}$$

我們来考虑积分

$$I_n=\int_a^b \left|f(x)-\sum_{k=1}^n a_k\varphi_k(x)\right|^2dx \tag{280}$$

或者

$$I_n=\int_a^b \left[f(x)-\sum_{k=1}^n a_k\varphi_k(x)\right]\left[\overline{f(x)}-\sum_{k=1}^n \overline{a_k\varphi_k(x)}\right]dx。$$

如果注意到等式 (278) 和 (279),对这个积分就得到下面的表达式:

$$I_n=\int_a^b |f(x)|^2dx-\sum_{k=1}^n |a_k|^2,$$

由于 $I_n\geqslant 0$, 即得:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \leqslant \int_a^b |f(x)|^2 dx, \tag{281}$$

当 $n \to \infty$ 时取极限

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leqslant \int_a^b |f(x)|^2 dx。 \tag{282}$$

这个不等式叫做貝塞尔不等式。

如果在公式 (282) 中 = 号成立，那么当 n 无限增大时积分 I_n 趋向于零，反过来，如果这个积分趋向于零，那么在公式(282)中 = 号成立。

如果在公式(282)中等号成立，这就是說，对于任意的連續函数

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx, \tag{283}$$

那么函数系就叫做完全的或者封閉的函数系，而方程(283)叫做封閉性方程。这时，对于任意的連續函数 $f(x)$ 积分 I_n 都趋向于零：

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x) \right|^2 dx = 0, \tag{284}$$

这就是說，任何这样一个函数都可任意接近地表成有限多个函数 $\varphi_k(x)$ 的綫性組合，这里所謂"任意接近"的意思并不是說差本身

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x) \right|$$

任意地小，而是說当 n 相当大时积分 I_n 任意地小。因此，更严格地，应該說，$f(x)$ 可以近似地表成有限多个函数 $\varphi_k(x)$ 的綫性組合，它的平方平均值誤差可以任意地小。

完全和 [47] 中一样，对于完全函数系 $\varphi_k(x)$ 可以得出广义的封閉性方程，也就是：設 a_k 和 b_k 是函数 $f(x)$ 和 $f_1(x)$ 的富里哀系数：

$$a_k = \int_a^b f(x) \overline{\varphi_k(x)} dx; \quad b_k = \int_a^b f_1(x) \overline{\varphi_k(x)} dx。 \tag{285}$$

下面这个广义的封閉性公式成立：

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \bar{b}_k = \int_a^b f(x) \overline{f_1(x)} dx。 \qquad (286)$$

和以上一样，設 a_k 是 $f(x)$ 的富里哀系数。作函数的富里哀級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)。$$

我們不能够断定，这个級数是收斂的，即使它是收斂的，我們也不能断定，它的和就等于 $f(x)$。下面是常用的写法：

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x), \qquad (287)$$

这里符号～只是指出，右边的无穷級数是函数 $f(x)$ 的富里哀級数。虽然在通常的意义下公式 (287) 不是一个等式，但是在 [**II, 148**] 中我們看到，如果 $\varphi_k(x)$ 是一个完全函数系，那么把右边逐項积分这个公式就变成了一个等式，这就是，

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{x_1}^{x_2} \varphi_k(x) dx \qquad (a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b)。$$

在积分之前我們可以在公式 (287) 的两边先同乘上一个連續函数 $\psi(x)$，这就是說

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \psi(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{x_1}^{x_2} \varphi_k(x) \psi(x) dx。$$

在整个区間 (a, b) 上积分，就得到公式：

$$\int_a^b f(x) \psi(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_a^b \varphi_k(x) \psi(x) dx。$$

不难驗証，这个公式就是对于函数 $f(x)$ 和 $\overline{\psi(x)}$ 的广义的封閉性公式。

50. 函数空間和空間 H 的关系　現在我們来建立上一小节所談到的函数空間和以前所研究的空間 H 之間的关系，这个关系对于理論物理是极其重要的。

假設在函数空間中我們有了一个完全的正交正則函数系

$$\varphi_k(x) \quad (k=1,\ 2,\ \cdots) \tag{288}$$

以致于对任意的連續函数 $f(x)$ 公式(283)都成立。再考虑第二个連續函数 $f_1(x)$，如以上一样，我們設

$$b_k=\int_a^b f_1(x)\overline{\varphi_k(x)}\,dx。$$

应用封閉性公式到它們的差，即得：

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k-b_k|^2=\int_a^b|f(x)-f_1(x)|^2dx。 \tag{289}$$

如果連續函数 $f(x)$ 和 $f_1(x)$ 不相同，那么右边部分一定大于零，因之系数 b_k 不可能全部和 a_k 相同，这就是說，对于函数系(288)，不同的連續函数就有不同的富里哀系数。这样說来，每一个連續函数都完全被它的富里哀系数决定，而这些系数的模的平方和成一收斂級数，这就是說，每一个連續函数都对应于空間 H 中的一个确定的矢量，并且不同的函数对应于空間 H 中不同的矢量，假設我們有一个函数序列 $f_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$，它們的富里哀系数是 $a_k^{(n)}$，也就是說，

$$a_k^{(n)}=\int_a^b\overline{\varphi_k(x)}f_n(x)\,dx。 \tag{290}$$

封閉性公式給出了：

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k-a_k^{(n)}|^2=\int_a^b|f(x)-f_n(x)|^2dx, \tag{291}$$

从而直接推出，空間 H 中分量为 $a_k^{(n)}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$ 的矢量收斂于分量为 a_k 的矢量这件事实就相当于我們函数空間中的等式

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b|f(x)-f_n(x)|^2dx=0。 \tag{292}$$

如果我們作矢量

$$z(a_1,\ a_2,\ \cdots) \quad 和 \quad z^{(n)}(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ 0,\ 0,\ \cdots)$$

那么在函数空間中 $z^{(n)}$ 就对应于 $f(x)$ 的富里哀級数的一段

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x)\text{。}$$

如我們所知[**45**]，$z^{(n)} \to z$，这就相应于，积分

$$\int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x) \right|^2 dx$$

趋向于零。

上面我們已經說明了，函数空間中每一个連續函数都对应于空間 H 中一个确定的矢量。反过来是不对的，这就是說，空間 H 中对应于連續函数的矢量只构成空間 H 的一部分。为了要使逆命題成立，我們不能只考慮連續函数的集合，而需要考慮某一个更广的函数类，不过对这个問題我們不打算多談。

在建立連續函数的函数空間与空間 H 之間的关系时，我們是由一个确定的正交函数系 (288) 出发的，如果我們引入另一正交正則函数系

$$\psi_k(x) \quad (k=1,\ 2,\ \cdots) \tag{293}$$

那么这时候对应的規則当然就是另外一个了。可以証明，在这个情况下，空間 H 中对应于所給的函数的这一些矢量就經受到一个 U 变換。在这里，函数系 (293) 当然也需要是完全的。

对于函数系 (288)，函数系 (293) 的每一个函数 $\psi_m(x)$ 都有一定的富里哀系数以及富里哀級数。

因之我們有下面的表述：

$$\psi_m(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} u_{km} \varphi_k(x)\text{。}$$

符号 $\sim$ 只是指出左边的函数对应于右边的这个富里哀級数。如果注意到函数 $\psi_m(x)$ 是正則化了的以及封閉性公式 (283)，我們就有：

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_{km}|^2 = 1\text{。} \tag{294}$$

此外，广义封閉性公式也成立

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bar{u}_{kp} u_{kq} = \int_a^b \overline{\psi_p(x)} \psi_q(x) dx,$$

根据函数 $\psi_k(x)$ 的正交性，这个式子和(294)綜合起来得：

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bar{u}_{kp} u_{kq} = \delta_{pq}\text{。} \tag{295}$$

这个式子向我們指出，元素为 u_{ik} 的矩陣 U 的各列适合正交和正則的条件。利用[48]的結果，可以証明，函数系(293)完全性的充分必要条件是，矩陣 U 每一行元素的模的平方和等于 1，这就是說，

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_{ik}|^2 = 1 \qquad (i = 1, 2, \cdots)\text{。} \tag{296}$$

以上所討論的全是关于由一个变数的函数所組成的函数空間的情形。我們也可以考虑定义在多維空間的一个区域上的多元函数。除去把单积分换成函数所定义的区域上的重积分这点差别外，以上全部的推理都可以用。

作为一个例子我們来考虑函数系

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots), \tag{297}$$

并取区間 $(-\pi, \pi)$ 作为基本区間。不难看出，函数 (297) 組成一正交正則函数系。因为，当 $p \neq q$：

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \overline{\varphi_p(x)} \varphi_q(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(q-p)x} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi i(q-p)} \left[e^{i(q-p)x}\right]_{x=-\pi}^{x=+\pi} = 0,$$

当 $p = q$：

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |\varphi_p(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} dx = 1\text{。}$$

利用我們以前对于展成富里哀級数的結果，可以証明，函数系

(297)在所說的区間上是完全的。

51. 綫性函数运算子 类似于空間 H 的綫性变换的概念，函数空間也有。这样，我們就引导到綫性函数运算子的概念。假定有了一个确定的規則，根据这个規則每一个(有一定性质的)函数 $f(x)$ 对应于另一个函数 $F(x)$：

$$F(x)=L[f(x)], \tag{298}$$

这里 L 是表示这个对应規則的符号。这个好象是函数概念的一个推广。作为自变量的不是一个变数，而是一个函数 $f(x)$，它是任意取自一个函数类，并且函数值同样地也不是数，而是一个新的函数 $F(x)$。这样一个广义的函数关系通常叫做函数运算子。函数运算子的概念具体地出現在許多数学物理的問題中。譬如說，我們来考虑关于端点固定的弦的振动的問題。在一个一定的时間 t 这个弦的图形是由两个初始条件的图形所决定，这两个初始条件是，初始偏差的图形和初始速度的图形，在这里显然我們有了一个泛函运算。在許多其他的数学物理的問題中也有完全相同的情况。有时候作为自变量的不是初始位置的图形，而譬如是，与問題有关的区域的边界。

运算子 L 叫做綫性的，如果适合下面的条件

$$L[f_1(x)+f_2(x)]=L[f_1(x)]+L[f_2(x)] \tag{299}$$

和

$$L[cf(x)]=cL[f(x)],$$

这里 c 是常数。

有界变换的条件有下面的形式：

$$\|L[f(x)]\|\leqslant M\|f(x)\|, \tag{299$_1$}$$

其中 M 是一个正常数。$f(x)$ 是所討論的函数空間中任意的函数。

我們不打算討論綫性运算子的一般理論；而只限于考虑一些特殊的例子，这样一方面来說明这个概念的实质，同时也說明它与

空間 H 中綫性变换的关系，因为空間 H 和函数空間之間的关系我們已經建立了。

在有一些情形，綫性函数运算子可以写成下面的形式：

$$F(x)=\int_a^b K(x, t)f(t)dt, \tag{300}$$

这里 $K(x, y)$ 是給定的一个二元函数，它通常叫做运算子的核。在这里，这个核完全相当于空間 H 中綫性变换的表 a_{ik}，代替指标 i 和 k，在这里我們有两个取連續的值的变数 x 和 y，并且公式(300)就相当于公式(266)。在討論积分方程时我們就要仔細地研究形式为(300)的这种运算子。

在这里我們也不难給出 U 运算子和厄密特运算子的定义。一个綫性函数运算子 L 叫做 U 运算子，如果对于某一类中的任意两个函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 适合下面的条件：

$$[Lf(x), L\varphi(x)]=[f(x), \varphi(x)]。 \tag{301}$$

厄密特运算子 L_1 由下面的关系式定义

$$[L_1f(x), \varphi(x)]=[f(x), L_1\varphi(x)]。 \tag{302}$$

假定 L_1 有(300)的形式，这就是說

$$L_1f(x)=\int_a^b K(x, t)f(t)dt。$$

作公式(302)中的两个数量乘积：

$$[f(x), L_1\varphi(x)]=\int_a^b\int_a^b \overline{K(x, t)}f(x)\overline{\varphi(t)}dt\,dx,$$

$$[L_1f(x), \varphi(x)]=\int_a^b\int_a^b K(x, t)f(t)\overline{\varphi(x)}dt\,dx,$$

在后一个积分中交换一下积分变数的符号，等式(302)就可以写成：

$$\int_a^b\int_a^b[\overline{K(x, t)}-K(t, x)]f(x)\overline{\varphi(t)}dt\,dx=0。 \tag{303}$$

如果运算子的核满足条件

$$K(x,\ t)=\overline{K(t,\ x)}, \tag{304}$$

那么对于任意两个函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 条件 (303) 都适合，在这个情形 L_1 是厄密特运算子。如果注意到上面的函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 的任意性，我們就可以断言，等式 (304) 对于条件 (303) 不但是充分而且是必要的，也就是說，这是 L_1 是厄密特运算子的条件。如果核 $K(x,\ t)$ 是实函数，那么条件 (304) 可以写成

$$K(x,\ t)=K(t,\ x), \tag{305}$$

这就是說，在这个情形下，核必須是一个对称函数。

我們再来考虑几个綫性运算子的例子。作为第一个例子 我們取求微商这个运算，然后再乘上 $\frac{1}{i}$:

$$Lf(x)=\frac{1}{i}\frac{df(x)}{dx}=\frac{1}{i}f'(x) \tag{306}$$

并取区間 $(-\pi,\ +\pi)$ 作为基本区間。对运算子 (306) 我們作数量乘积

$$[f(x),\ L\varphi(x)]=\left[f(x),\ \frac{1}{i}\varphi'(x)\right]=\frac{-1}{i}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\overline{\varphi'(x)}\,dx。$$

假定这些函数是周期为 2π 的周期函数，用部分积分法得:

$$\left[f(x),\ \frac{1}{i}\varphi'(x)\right]=\frac{-1}{i}f(x)\overline{\varphi(x)}\ \Big|_{x=-\pi}^{x=+\pi}+\frac{1}{i}\int_{-\pi}^{+\pi}f'(x)\overline{\varphi(x)}\,dx,$$

由此卽得等式:

$$\left[f(x),\ \frac{1}{i}\varphi'(x)\right]=\left[\frac{1}{i}f'(x),\ \varphi(x)\right], \tag{307}$$

这就是說，运算子 (306) 对于可微分的周期函数类是一个厄密特运算子。

在函数空間中我們选函数系 (297) 作为坐标系。这样一来，函

数 $f(x)$ 就被它的富里哀系数 a_k 所决定，这些 a_k 由下面的公式定义

$$a_k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{+\pi}e^{-ikx}f(x)\,dx。\qquad(308)$$

对于函数 $\frac{1}{i}f'(x)$ 我們有另外一組富里哀系数 a'_k。不难建立一綫性变換，它用 a_k 来表示 a'_k。这个綫性变換就把函数运算子(306)表成一无限矩陣的形式，不过必須了解到，函数运算子(306)的这一个表达式是相对于函数空間中一个一定的坐标系，也就是以函数(297)作为坐标函数。我們有：

$$a'_k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}i}\int_{-\pi}^{+\pi}e^{-ikx}f'(x)\,dx,$$

用部分积分法并且把 $f(x)$ 看作周期函数，由此即得：

$$a'_k=\frac{k}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{+\pi}e^{-ikx}f(x)\,dx,$$

这就是說

$$a'_k=ka_k\qquad(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)。\qquad(309)$$

这个等式就表示了上面所說的綫性变換。它的矩陣是：

$$\left\|\begin{matrix}\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ \cdots&-2,&0,&0,&0,&0,&\cdots\\ \cdots&0,&-1,&0,&0,&0,&\cdots\\ \cdots&0,&0,&0,&0,&0,&\cdots\\ \cdots&0,&0,&0,&1,&0,&\cdots\\ \cdots&0,&0,&0,&0,&2,&\cdots\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\end{matrix}\right\|,\qquad(310)$$

我們看到，这个矩陣是对角形式的。在矩陣(310)中行和列的編号不是由 1 到 ∞，而是由 $-\infty$ 到 $+\infty$，这个事实是无关紧要的。同样，函数(297)也是这样編号的。应該注意，这些函数适合下面

这个显然的关系

$$\frac{1}{i}\varphi_k'(x)=k\varphi_k(x),$$

这就是說，如果用 L 表运算子(306)，得：

$$L\varphi_k(x)=k\varphi_k(x)。\tag{311}$$

和[37]相仿，我們可以称 $\varphi_k(x)$ 为运算子 L 的特征函数并称 k 是相应的特征值。矩陣(310)的对角形式就跟 $\varphi_k(x)$ 是运算子(306)的特征函数这个事实直接有关。

作为最后一个例子，我們来考虑乘以自变数 x 这个运算

$$L_1[f(x)]=xf(x)。\tag{312}$$

如果我們取函数(297)作为函数空間中的坐标系，我們来建立在空間 H 中表示这个运算子的綫性变换。和以上一样，設 a_k 是函数 $f(x)$ 的富里哀系数，a_k' 是函数 $xf(x)$ 的富里哀系数，这就是說

$$a_m'=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{+\pi}e^{-imx}xf(x)\,dx \qquad (m=0,\ \pm1,\ \cdots)。\tag{313}$$

我們需要建立以 a_k 来表示 a_k' 的綫性变换。

为了計算积分(313)我們定义函数 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{imx}x$ 的富里哀系数：

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}e^{i(m-k)x}x\,dx。$$

用部分积分，当 $m-k\neq0$ 得.

$$c_k=\frac{1}{i(m-k)}e^{i(m-k)\pi}=\frac{(-1)^{m-k}}{i(m-k)}。$$

現在来决定系数 c_m：

$$c_m=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}x\,dx=0。$$

把公式(313)改写为：

$$a'_m=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{+\pi}(\overline{e^{imx}x})f(x)dx,$$

应用广义的封閉性方程(286)，其中函数 $f(x)$ 的富里哀系数是 a_k，而函数 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{imx}x$ 的富里哀系数由以上的公式决定。对于 a'_m 我們得到表达式：

$$a'_m=i\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}'\frac{(-1)^{m-k}}{m-k}a_k; \tag{314}$$

求和号上加一撇表示在这里边应該除去相当于 $k=m$ 的一項。如果在函数空間中取函数(297)作为坐标函数，公式(314)就給出空間 H 中相应于运算子(312)的綫性变換。

一般地，假設取某一个完全的正交正則函数系作为坐标函数

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \cdots。$$

如果 H 是某一个綫性的厄密特运算子，并且：

$$H\varphi_l(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}a_{kl}\varphi_k(x),$$

那么 $a_{lk}=\overline{a}_{kl}$。設 $\psi(x)$ 是一函数，且

$$\psi(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}c_k\varphi_k(x)$$

是它的富里哀級数。对于函数 $H\psi(x)$ 我們有一个新的富里哀級数

$$H\psi(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}c'_k\varphi_k(x),$$

我們可以証明

$$c'_k=\sum_{j=1}^{\infty}a_{kj}c_j\qquad(k=1,\ 2,\ \cdots)。$$

如果取函数 $\varphi_k(x)$ 作为坐标函数，这个綫性变換就表示运算子 H。

我們再回到求微商的运算子(306)。如果所考虑的是連續函数，那么这个运算子是不能应用到所有的函数，因为存在这样的連

續函数，它对每一个值 x 都沒有微商。运算子(306)相当于空間 H 中的綫性变换 (309)。如果級数 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|a_k|^2$ 是收斂的，那么級数

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'|a'_k|^2=\sum_{-\infty}^{+\infty}k^2|a_k|^2$$

有可能是发散的。这說明变换(309)不能应用到整个的空間 H，跟上面所說的相符。

第五卷中将对这一材料給出更詳尽更严格的叙述。

第三章　群論基础和群的綫性表示

52．綫性变換群　我們来討論 n 維空間中的 U 变換的全体。所有这些变換的行列式都不等于零，因此对于每一个被相应矩陣 U 所完全决定的 U 变換 Ux，存在一个完全确定的逆变換 $U^{-1}x$，这个逆变換也是 U 变換 [28]。而且，假如 U_1x 和 U_2x 是两个 U 变換。那么它們的积 U_2U_1x 也将是 U 变換。全体 U 变換的集合的这些性质可以簡单地表示为：U 变換全体組成一个群。

一般說来，某些行列式不等于零的綫性变換的集合，如果滿足下面两个条件，就組成一个群：首先，如果某一个变換属于我們的集合，那么它的逆变換也属于这个集合，其次，集合中的两个变換的乘积（因子的次序可隨意）仍属于这个集合，而且两个因子可以是相同的。

由于任一个变換和它的逆变換的乘积是恒等变換，我們可以断言：一个群必須包含恒等变換，也就是单位矩陣。

一般地，綫性变換被它的矩陣完全决定，因此我們不論說綫性变換群或矩陣群都可以。

再来举一些綫性变換群的例子。不难看出，实正交变換的全体組成一个群。我們知道，这些实正交变換的行列式等于 (±1)。假如我們取行列式为 $(+1)$ 的实正交变換全体，那么它們也組成一个群。但是如果我們取行列式为 (-1) 的实正交变換全体，那么它們就不再組成群了，因为两个行列式为 (-1) 的矩陣的积的行列式等于 $(+1)$。

特别地，如果我們討論三个变数的实正交变換群，那么这个群

是由（1）空間圍繞原点的轉动和（2）由轉动和对于原点的对称变換所合成的变換所組成。如果我們取三个变数的行列式为 $(+1)$ 的正交变換群，那么这个群就是空間圍繞原点的轉动群。

在我們所考虑的一切情形中，群包含了一个由无穷多个变換所組成的集合，其中三維空間圍繞原点的轉动群依賴于三个任意的实参数——尤拉角，关于这个我們在前面已經說过了。

作为又一个例子，我們来討論空間以角度 φ 圍繞 Z 軸的轉动，对应的公式为

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ y' &= x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

对于参数 φ 在区間 $(0, 2\pi)$ 中所有可能的实值，显然我們得到一个群，这个群是一个无穷的变換集合，由一个参数所决定。引进下列变換的矩陣表示：

$$Z_\varphi = \left\| \begin{matrix} \cos\varphi, & -\sin\varphi \\ \sin\varphi, & \cos\varphi \end{matrix} \right\|. \tag{2}$$

直接可以看出，角度为 φ_1, φ_2 的两个轉动的乘积是角度为 $(\varphi_1+\varphi_2)$ 的轉动：

$$Z_{\varphi_2} Z_{\varphi_1} = Z_{\varphi_2+\varphi_1}, \tag{3}$$

同样有
$$Z_{\varphi_1} Z_{\varphi_2} = Z_{\varphi_1+\varphi_2}.$$

因此我們看出，在这个情形下，群中所有的变換，也就是群中所有的元素，是彼此可交換的。这样的群叫做阿倍尔群。并且，在最后一个例子中，群中两个元素的乘积可归結到对应于相乘矩陣的参数 φ 的值的相加。

我們可以把最后一个群稍微扩大一些，不仅取 XY 平面圍繞原点的轉动，而且取反射，就是对于 Y 軸的对称变換，而且显然，这两种运算相乘的次序是可以不管的，也就是說，首先圍繞原点旋轉然后对称于 Y 軸反射或者在相反的次序下进行是沒有关系的。

虽然次序的改变影响乘积，但是在两种情形下，总的变换的集合还是同一个。这就是两个变数的实正交变换。对应的矩陣有下列形式：

$$\{\varphi, d\}=\left\|\begin{matrix} d\cos\varphi, & -d\sin\varphi \\ \sin\varphi, & \cos\varphi \end{matrix}\right\|, \tag{4}$$

这里 φ 就是以前的参数，而 d 是等于 ± 1 的一个数。当 $d=1$ 时我們所得到的就是 XY 平面圍繞原点的轉动，而当 $d=-1$ 时得到一个轉动，并在轉动后施行上面所提起的对称变换。不难驗算，对于矩陣（4）的乘法有下述規則

$$\{\varphi_2, d_2\}\{\varphi_1, d_1\}=\{\varphi_1+d_1\varphi_2, d_1d_2\}。 \tag{5}$$

在这个情形下，乘积和因子的次序有关，也就是說，这个群已經不是阿倍尔群了。显然，三維空間的实正交变换群以及三維空間圍繞原点的轉动群同样地也都不是阿倍尔群。

到現在为止，我們所举的群的例子都包含变换的无穷（元素）集合，并且对应的矩陣包含任意的实参数。現在我們来举几个只有有限个元素的群的例子。設 m 是某一个正整数。我們来討論 XY 平面以角度

$$0, \frac{2\pi}{m}, \frac{4\pi}{m}, \cdots, \frac{2(m-1)\pi}{m}$$

的轉动。

現在我們一共有 m 个变换，它們的矩陣是

$$Z_{\frac{2k\pi}{m}}=\left\|\begin{matrix} \cos\frac{2k\pi}{m}, & -\sin\frac{2k\pi}{m} \\ \sin\frac{2k\pi}{m}, & \cos\frac{2k\pi}{m} \end{matrix}\right\| \quad (k=0, 1, 2, \cdots, m-1)。$$

显然，这些变换組成一个群，而且这个群的元素是同一个变换的整幂，就是

$$Z_{\frac{2k\pi}{m}}=Z_{\frac{2\pi}{m}}^{k} \quad (k=0, 1, \cdots, m-1)。 \tag{6}$$

这样由某一个变换的幂所組成的有限群，一般称为巡回群。

假如我們取某一个与 π 不可通約的角度 φ_0，那么，显然变换(矩陣)

$$Z_{\varphi_0}^k = Z_{k\varphi_0} \quad (k=0, \pm1, \pm2, \cdots) \tag{7}$$

也組成一个群。但是这个群包含无穷多个元素，因为对于无論那个整指数，矩陣 $Z_{\varphi_0}^k$ 总不会等于 $Z_{\varphi_0}^0 = I$。群(7)是一个无限群，但是它的矩陣不包含連續参数。在这种情形，我們就說群中的元素是可数的，这就是說，我們可以用整数将群中的元素編号，也就是說，我們可以給群中每一个元素以一个整数的指标，使得不同的元素有不同的指标而且每一个整数都将是某一个元素的指标。这在包含連續参数的群中是不可能的事。

53. 正多面体群 现在我們再来举一些有限群的例子，而且这些群都是由一些三維空間圍繞原点的轉动所組成。我們知道，在一定的坐标系統下，这样的轉动可用坐标的某些綫性变换来表示。注意，当我們說到空間圍繞原点的轉动时，我們只是指从原来的位置到改变成的位置的轉变的最終效果。至于这个轉变用什么方法施行，完全不在我們的考慮之中。事实上，每一个綫性变换决定被变换的点的坐标，但是沒有說到变换的方法。变换方法本身的研討不在我們的討論之內。

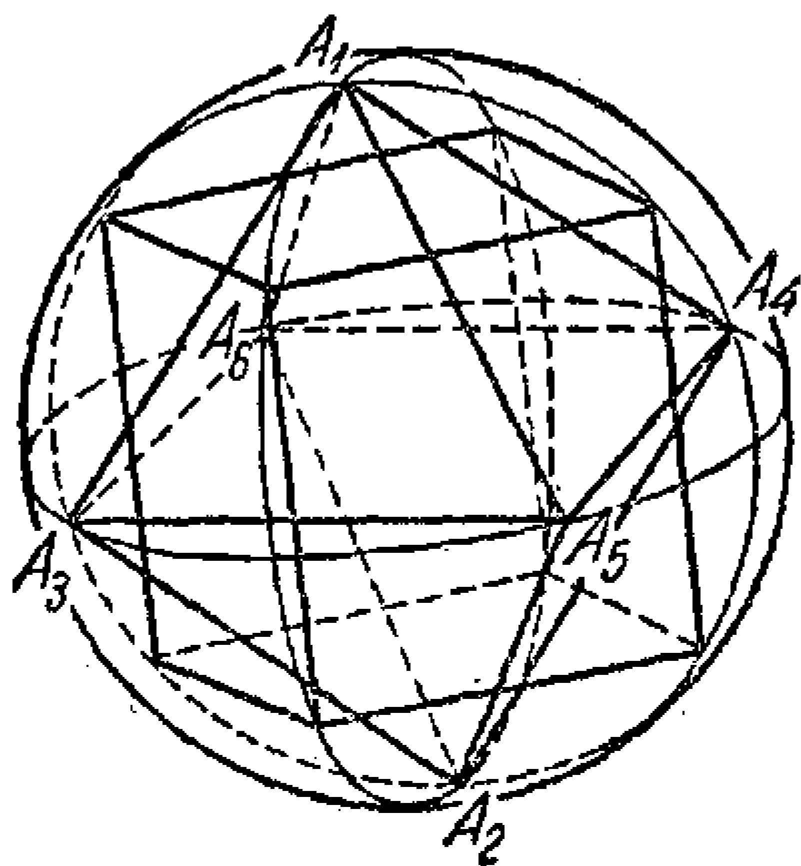


图 2

考慮以原点为中心单位为半徑的球。在这个球內作一个任意的正多面体，例如正八面体(图2)。我們知道这个多面体的表面由八个等边三角形所組成。现在来討論三維空間圍繞原点的那样一些轉动，在这些轉动之后，我們所取的八面体和它本来的位置重合。

不难看出，这些变换的集合成为一个群而且这个群只包含有限多个元素。現在来計算一下这个群元素的个数。取八面体的任一个联結两个对頂点的軸。假如我們将空間以角度 $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$ 圍繞原点而旋轉，那么八面体与它原来的位置重合。显然，角度为 0 的轉动对应于恒等变换，即单位矩陣。我們用

$$S_0=I,\ S_1,\ S_2,\ S_3 \tag{8}$$

来表示上面所提到的圍繞所取軸的四个轉动。

設 A 是所取軸上的一个頂点。我們討論五个綫性变换

$$T_1,\ T_2,\ T_3,\ T_4,\ T_5,$$

它們使八面体与原来的位置重合而頂点 A 与另五个頂点中的一个重合。除了(8)中的四个轉动外，再組成下面的空間圍繞原点的二十个轉动：

$$T_kS_0,\ T_kS_1,\ T_kS_2,\ T_kS_3 \quad (k=1, 2, 3, 4, 5)。 \tag{9}$$

不难檢驗，(8)和(9)这 24 个轉动都是不同的。这个从几何上看来是很显然的，并且也可以用下法来証明：假設

$$T_pS_q=T_{p_1}S_{q_1}。 \tag{10}$$

变换 S_i 对应于圍繞通过頂点 A 的軸的一个轉动，在这个变换下，A 保持原来的位置。当指标 p 和 p_1 不同时，变换 T_p 和 T_{p_1} 将頂点 A 变到不同的頂点，因此，由于等式 (10) 指标 p 和 p_1 必須相等，而因此以 $T_p^{-1}=T_{p_1}^{-1}$ 同乘这个等式，显然 q 和 q_1 也必須相等，这就是説，等式(10)仅当左右两边的因子相同时方可成立。因此，(8)和(9)給了我們 24 个轉动，在这些轉动之下，八面体与原来的位置重合。現在来証明，具有这个性质的轉动都已在这些轉动之中。令 V 是某一个使八面体与自己重合的轉动。假設在这个轉动下頂点 A 与另一个頂点 A_j 重合而 T_j 是变换 T_k 中将 A 变到 A_j 的一个。作变换 $T_j^{-1}V$。在这个变换下八面体与自己重合而且

頂点 A 也保持原来的位置。因此 A 的对頂点也保持原来的位置，因此所作变换是圍繞通过頂点 A 的軸的轉动 S_i 中的一个，这就是說 $T_j^{-1}V=S_i$ 由此 $V=T_jS_i$。换句話說，任一个将八面体变为自己的轉动都已包含在我們上面所說的那 24 个轉动之中。因此，結果是，使八面体变为自己的轉动群包含 24 个元素。

显然，我們可以在单位球內用下述方法作一个立方体，使得經过八面体八个面的中心的半徑都以立方体的頂点作为端点。由此可直接推出，立方体的轉动群就是八面体的轉动群。假設我們另外选一个八面体的位置，而新的位置恰好由原来的位置經一个轉动而得到，这个轉动的矩陣是 U。假如 V 是某一个使原来的八面体变为自己的轉动，那么显然地，UVU^{-1} 将給出这样一个轉动：它将新的八面体变为自己，并且反过来也对。因此，假如原来的八面体的轉动群由矩陣 V_k $(k=1, 2, \cdots, 24)$ 所組成，那么新的八面体的轉动群就由相似的矩陣 UV_kU^{-1} 所組成。换句話說，我們得到一个相似群。一般地，假如某些矩陣 V_k 的集合組成一个群，那么对于任意一个固定的矩陣 U，相似的矩陣 UV_kU^{-1} 的集合也組成一个群。这个不难从群的定义直接証明，我們把証明留給讀者去完成。第二个群一般地被称为与第一个相似的群。

現在来討論正四面体，它的表面由四个等边三角形所組成而且有四个頂点。取四面体的任意一个軸，这个軸联結它的一个頂点 A 和对面的中心。假如圍繞指定的軸依某一个方向把空間旋轉角度 $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$，那么四面体和它原来的位置重合。令 S_0, S_1, S_2 是这些轉动。再引进三个綫性变换 T_1, T_2, T_3，在这三个变换下四面体与自己重合而頂点 A 和另外三个頂点中的一个重合。除轉动 S_0, S_1, S_2 外再作九个轉动 $T_kS_0, T_kS_1, T_kS_2 (k=1, 2, 3)$。我們得到 12 个不同的轉动，而且这就是使四面体变为自己的轉动的全体。

現在来考慮正二十面体，它的表面由二十个正三角形所組成，并且有十二个頂点。象上面一样，取二十面体的任意一个軸，这个軸联結它的頂点 A 和对面的頂点。当空間以角度 $\frac{2k\pi}{5}$ $(k=0, 1, 2, 3, 4)$ 而轉动时，二十面体和它自己重合。令 S_k 是这些轉动。再有十一个轉动 $T_l(l=1, 2, \cdots, 11)$，这些变換使二十面体和它自己重合而頂点 A 变到其他頂点中的一个。使二十面体变为自己的整个轉动群由五个轉动 S_k 和 55 个轉动 T_lS_k 所組成。因此，这个群一共包含 60 个轉动。这个群也就是正十二面体的群，十二面体的表面由十二个正五边形所組成，并且有二十个頂点。为了說明这个，必須将十二面体放在二十面体的对应位置，就象上面立方体之对于八面体一样。

再来考慮一个由三維空間的轉动所組成的群。假如在 XY 面上有一个正 n 边形，它的中心和坐标原点重合。取这个 n 边形的任意一个軸，这个軸由它的一个頂点 A 和对頂点（假如 n 是偶数），或者和它的对边的中点（假如 n 是奇数）联結而成。当 XY 面以角度 0 和 π 圍繞这个軸而轉动时，n 边形和自己重合。第一个轉动是恒等变換 1，而我們用 S 来表示第二个轉动。

除此以外，我們有以角度 $\frac{2k\pi}{n}$ $(k=1, 2, \cdots, n-1)$ 圍繞 Z 軸的轉动 T_k，在这些轉动之下 n 边形也和自己重合，而頂点 A 变至其他頂点中的一个。当 $k=0$ 时，得到恒等变換 $T_0=I$。将 n 边形变为自己的整个变換群由下列 $2n$ 个变換所組成：T_k 和 T_kS $(k=0, 1, 2, \cdots, n-1)$。

所提到的 n 边形一般地被称为两面体，它的表面是由两个（上面和下面）面所組成，而所作的群叫做两面体群。

54. 劳倫次变換　我們以前所举的綫性变換群的例子，都是由 U 变換或三維空間的轉动（U 变換的特殊情形）所組成。現在我們来研究一个新的綫性变換群，它的元素不再是 U 变換。这个

群在相对論、电动力学以及在量子力学中牵涉到相对論的部分都很重要。

討論四个变数 x_1, x_2, x_3, x_4，其中前三个是点的空間坐标，而最后一个变数是时間。由于特殊相对論的关于相对运动中某一个确定的速度 c（光速）的不变性的基本要求，产生了关于上面提起的四个变数的这样一些綫性变換的問題，在这些綫性变換之下，表达式

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-c^2x_4^2$$

保持不变，这就是說，我們需要找这样一些綫性变換，用旧变数 x_k 来表示新的变数 x'_k，使下式成立：

$$x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2-c^2x_4'^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2-c^2x_4^2\text{。}$$

首先我們討論当坐标 x_2 和 x_3 保持不变而且在綫性变換中只出現变数 x_1 和 x_4 的情形。如此，我們就需要找这样的綫性变換

$$\left.\begin{aligned} x'_1&=a_{11}x_1+a_{14}x_4,\\ x'_4&=a_{41}x_1+a_{44}x_4, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

使得

$$x_1'^2-c^2x_4'^2=x_1^2-c^2x_4^2\text{。} \tag{12}$$

根据公式 $$y_1=icx_4$$

引进一个新的純虛变数 y_1 来代替 x_4。

所說的綫性变換就有下述形式：

$$\left.\begin{aligned} x'_1&=\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}y_1,\\ y'_1&=\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}y_1, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

此处 $\alpha_{11}=a_{11}$; $\alpha_{12}=\dfrac{a_{14}}{ic}$; $\alpha_{21}=ica_{41}$; $\alpha_{22}=a_{44}$,

而条件(12)可以重写为下述形式：

$$x_1'^2+y_1'^2=x_1^2+y_1^2\text{。} \tag{14}$$

系数 α_{11} 和 α_{22} 应該是实数而 α_{12} 和 α_{21} 应該是純虛数，因此用

$\alpha_{12}=i\beta_{12}$ 和 $\alpha_{21}=i\beta_{21}$ 表示。显然，条件(14)相当于說变换(13)是正交的，因此，每一行和每一列的元素的平方和必須等于单位。很容易驗算，我們馬上就得出 $\beta_{12}^2=\beta_{21}^2=\alpha_{11}^2-1=\alpha_{22}^2-1$ 和 $\alpha_{11}^2=\alpha_{22}^2$。假設 $\alpha_{22}=\alpha$ 和 $\beta_{12}=\alpha\beta$。我們将认为系数 α_{11} 和 α_{22} 是正的，这相当于不改变計算 x_1 和 x_4 的方向。因此由于上述的关系，我們可用

$$x_1'=\alpha x_1+i\alpha\beta y_1$$

$$y_1'=\alpha_{21}x_1+\alpha y_1$$

来代替(13)。行的正交条件

$$\alpha\alpha_{21}+i\alpha^2\beta=0$$

給出 $\alpha_{21}=-i\alpha\beta$，这就是說，$\beta_{12}$ 和 β_{21} 必須异号。最后，条件

$$\alpha_{11}^2+\alpha_{12}^2=1.$$

給出 $$\alpha^2-\alpha^2\beta^2=1 \text{ 或 } \alpha=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (\beta^2<1)$$

因此最后我們得到下述公式：

$$x_1'=\frac{x_1+i\beta y_1}{\sqrt{1-\beta^2}};\quad y_1'=\frac{-i\beta x_1+y_1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

或者，再从变数 $y_1=icx_4$ 还原到原来的变数 x_4：

$$x_1'=\frac{x_1-\beta cx_4}{\sqrt{1-\beta^2}};\quad x_4'=\frac{-\frac{\beta}{c}x_1+x_4}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{15}$$

从这两个等式可直接推出，变数 x' 所对应的坐标系統对原来的坐标系統以速度

$$v=\beta c \tag{16}$$

按照 x_1 的方向而移动。因为假如取 x_1' 为常数我們就有：

$$dx_1-\beta c dx_4=0;\ \text{即}\ \frac{dx_1}{dx_4}=\beta c。$$

按照公式(16)，引进速度 v 来代替 β 并用 x 代替 x_1，t 代替 x_4，我們就得到两个变数的劳倫次变换的通常的形式

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\quad t'=\frac{-\frac{v}{c^2}x+t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}。\tag{17}$$

在 $c\to\infty$ 的极限情形，我們就得到古典力学相对运动的一般公式

$$x'=x-vt;\ t'=t。$$

不难檢驗，一个实参数的劳倫次变换(17)，組成一个群。对于 x 和 t 解方程(17)，我們得到(17)的逆变换。現在来說明，这个逆变换也是一个劳倫次变换，它是从变换(17)将$(-v)$代替 v 而得到的。事实上，解方程 (17)，就有

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)x=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}(x'+vt');$$

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)t=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\left(\frac{v}{c^2}x'+t'\right),$$

由此立即推出

$$x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\quad t=\frac{\frac{v}{c^2}x'+t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}。$$

現在来討論对应于参数值 $v=v_1$ 和 $v=v_2$ 的两个劳倫次变换 L_1 和 L_2。作它們的乘积 L_2L_1 并来証明这个积也是劳倫次变换。我們要求下二矩陣的乘积：

$$\left\|\begin{matrix}\frac{1}{\sqrt{1-\beta_2^2}}, & -\frac{\beta_2 c}{\sqrt{1-\beta_2^2}}\\ -\frac{\frac{\beta_2}{c}}{\sqrt{1-\beta_2^2}}, & \frac{1}{\sqrt{1-\beta_2^2}}\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}\frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}}, & -\frac{\beta_1 c}{\sqrt{1-\beta_1^2}}\\ -\frac{\frac{\beta_1}{c}}{\sqrt{1-\beta_1^2}}, & \frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}}\end{matrix}\right\|,$$

此处 $$\beta_1=\frac{v_1}{c};\ \beta_2=\frac{v_2}{c}。$$

应用矩陣乘法的一般法則，我們得到乘积为

$$\frac{1+\beta_1\beta_2}{\sqrt{1-\beta_2^2}\sqrt{1-\beta_1^2}}\left\|\begin{matrix} 1, & -\dfrac{\beta_1 c+\beta_2 c}{1+\beta_1\beta_2} \\ -\dfrac{\dfrac{\beta_1}{c}+\dfrac{\beta_2}{c}}{1+\beta_1\beta_2}, & 1 \end{matrix}\right\|。 \tag{18}$$

引进一个新的量

$$v_3=\frac{v_1+v_2}{1+\dfrac{v_1 v_2}{c^2}}。 \tag{19}$$

不难驗算出下列恒等式为正确:

$$\frac{1+\dfrac{v_1 v_2}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{v_2^2}{c^2}}\sqrt{1-\dfrac{v_1^2}{c^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v_3^2}{c^2}}},$$

于是矩陣(18)可以写作下列形式:

$$\left\|\begin{matrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta_3^2}}, & -\dfrac{\beta_3 c}{\sqrt{1-\beta_3^2}} \\ -\dfrac{\dfrac{\beta_3}{c}}{\sqrt{1-\beta_3^2}}, & \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta_3^2}} \end{matrix}\right\|, \quad \left(\beta_3=\frac{v_3}{c}\right)$$

这就是說，它也对应于一个参数值 $v=v_3$ 的劳倫次变换。因此公式(19)就是特殊相对論中速度相加的法則。如果在公式(19)中假設 $v_1=c$，那么很容易算出，結果所得的速度 $v_3=c$，这就是說，当两个运动相加时速度 c 确实是不变的。

在公式(15)推演过程中，我們用一定的方法固定了綫性变换(11)的系数的正負号，就是：认为系数 a_{11} 和 a_{44} 是正的。这个要求可以用另外一个方法来代替，就是：系数 a_{44} 和行列式

$$a_{11}a_{44}-a_{12}a_{21} \tag{20}$$

是正的。

不难看出，作为一个推論，从这两个假設可得出 a_{11} 是正的，反过来也对。事实上，变换 (17) 的行列式等于 $(+1)$，这就是說，当 $a_{11}>0$ 时，行列式(20)也是正的。假如我們取 $a_{11}=-\alpha$ 和 $a_{44}=\alpha$，其中 $\alpha>0$，那么就得到一个行列式为 (-1) 的变换。系数 a_{44} 是正的条件相当于：当 x_1 固定而 $x_4\to\infty$ 时，我們有 $x_4'\to\infty$。我們可以說，这是相当于讀时間的方向的不变性。因此，公式并沒有給出所有满足条件(12)的变换，而只給出了那些行列式 (20) 为正并且不改变时間的方向的变换。

現在我們来討論四个变数 x_k $(k=1, 2, 3, 4)$ 的一般劳倫次变换，这里必須满足条件：

$$x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2-c^2x_4'^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2-c^2x_4^2。\qquad(21)$$

将 x_k $(k=1, 2, 3)$ 和 x_k' $(k=1, 2, 3)$ 看作两个不同的三維空間 R 和 R' 中的笛卡尔坐标。我們来証明，在这两个空間中用适当的方法选取坐标軸后，我們可以将一般的劳倫次变换化为上面討論过的特殊情形。用 T 表示一般的劳倫次变换而用 S 表示上述形式的特殊劳倫次变换。我們的断言相当于說我們可以将 T 表示成

$$T=VSU,\qquad(22)$$

此处 U 和 V 是两个实正交变换，相当于前面所提起的空間 R 和 R' 中的坐标变换。

和前面一样，我們引进四个新变数

$$y_1=x_1;\ y_2=x_2;\ y_3=x_3;\ y_4=icx_4,$$

并用同样的方法引进

$$y_1'=x_1';\ y_2'=x_2';\ y_3'=x_3';\ y_4'=icx_4'。$$

代替条件(21)，对于新的变数我們有通常的正交条件

$$y_1'^2+y_2'^2+y_3'^2+y_4'^2=y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2。\qquad(23)$$

我們所要找的綫性变换应該有下述形式：

$$y'_k=\alpha_{k1}y_1+\alpha_{k2}y_2+\alpha_{k3}y_3+\alpha_{k4}y_4 \quad (k=1, 2, 3, 4)。 \qquad (24)$$

考慮到 y_4 和 y'_4 必須是純虛的，我們可以断言，系数 α_{k1}，α_{k2}，α_{k3}，当 $k=1, 2, 3$，和 α_{44} 都必須是实数，而系数 α_{41}，α_{42}，α_{43} 和 α_{k4} 当 $k=1, 2, 3$，必須是純虛数。空間 R' 中坐标軸的变换就等于对于变换 y'_1，y'_2，y'_3 作实正交变换。現在来討論系数：

$$\alpha_{14}=i\beta_{14};\ \alpha_{24}=i\beta_{24};\ \alpha_{34}=i\beta_{34}。$$

三个实数 β_{14}，β_{24}，β_{34} 决定一个矢量，假如我們取这个矢量的方向作为空間 R' 中第一个新的坐标軸，那么，在对应的正交变换的結果中系数 α_{24} 和 α_{34} 变为零。为了說明这一事实，只須注意：由于公式(24)，对于变数 y'_1，y'_2，y'_3 的正交变换，可化为对于 β_{14}，β_{24}，β_{34} 的同样的变换。这样，我們就认为空間 R' 的这样一个变换已經施行了，因此我們有 $\alpha_{24}=\alpha_{34}=0$。条件(23)指出，变换(24)的系数必須滿足通常正交变换的条件。考慮到上面所提起的变数等于零，再考慮第二行和第三行，我們就得到下列条件：

$$\alpha_{k1}^2+\alpha_{k2}^2+\alpha_{k3}^2=1 \quad (k=2, 3),$$

$$\alpha_{21}\alpha_{31}+\alpha_{22}\alpha_{32}+\alpha_{23}\alpha_{33}=0,$$

这里所有的系数都是实数，由于所写的条件，分量为 $(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23})$ 和 $(\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33})$ 的两个矢量必須有单位长并且是互相垂直的。假如我們在 R 中取这两个矢量作为 X_2 和 X_3 軸方向的基础矢量，那么表示上述两矢量和变矢量 (y_1, y_2, y_3) 的內积的两个和

$$\alpha_{k1}y_1+\alpha_{k2}y_2+\alpha_{k3}y_3 \quad (k=2, 3)$$

就只由 y_2 和 y_3 所表示，这就是說，对于这样选擇的坐标軸，我們有：

$$\alpha_{22}=\alpha_{33}=1;\ \alpha_{21}=\alpha_{23}=\alpha_{31}=\alpha_{32}=0。$$

这样一来，在两个空間中都这样选定坐标軸之后，变换(24)的矩陣就将是

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \alpha_{13}, & \alpha_{14} \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ \alpha_{41}, & \alpha_{42}, & \alpha_{43}, & \alpha_{44} \end{matrix} \right\|。 \tag{25}$$

这个矩陣是开始所提到的矩陣被两个正交变换相乘而得到的結果，这两个变换只說到前三个变数，但是它們当然可以看作四个变数的正交变换，不过第四个变数保持不变。由于两个正交变换的乘积仍是正交变换，我們可以断言，矩陣(25)的元素仍将滿足正交条件。写下第一行正交于第二、三行的条件，我們得到

$$\alpha_{12}=\alpha_{13}=0,$$

而第四行与第二、三行正交的条件給出

$$\alpha_{43}=\alpha_{42}=0。$$

最后我們得到下面的矩陣：

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_{11}, & 0, & 0, & \alpha_{14} \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ \alpha_{41}, & 0, & 0, & \alpha_{44} \end{matrix} \right\|,$$

这就是說，在这个情形下，我們有綫性变换

$$y_1'=\alpha_{11}y_1+\alpha_{14}y_4,$$

$$y_4'=\alpha_{41}y_1+\alpha_{44}y_4,$$

它必須滿足条件

$$y_1'^2+y_4'^2=y_1^2+y_4^2。$$

我們所要的就是这样的变换，并且它使我們化为形式(15)的特殊劳倫次变换，因此我們可认为公式(22)已經被建立起来了。只需注意，当决定变换 S 时，正負号的选擇法則和前面有同样的意义，假如我們要求一般劳倫次变换不改变时間的方向而且它的行列式大于零。我們总可认为正交变换 U 和 V 是三維空間的轉动，

因此它們的行列式大于零,并且不牽涉到第四个变数。这样,我們就得出为使变換 S 的行列式大于零并且它不变时間方向所必需满足的条件,这就是說,在对于一般变换 T 的上述假設之下,我們也得出了当初在推出特殊变換公式时所加上的条件。滿足前面所提出的两个条件的一般劳倫次变換叫做正劳倫次变換。从以上的討論可知,它們的矩陣可按照公式(22)而得到,其中 S 是形式为(15)的特殊劳倫次变換而 U 和 V 是三維空間轉动的矩陣。可以驗明,就象变換(15)一样,正劳倫次变換組成一个群。

以上的討論指出,只由条件(21)所决定的更一般的劳倫次变換的矩陣可由公式(22)表示,其中 U 和 V 是轉动而 S 是两个变数的一般劳倫次变換。假如这是一个正变換,那么从公式(15)可直接推出 $D(S)=1$,而且任一个正劳倫次变換的行列式都等于1,因为 U 和 V 的矩陣等于1,而且我們把 U, S 和 V 的矩陣都考慮作为四阶矩陣。很容易驗明,在二阶劳倫次变換的一般情况下,行列式可等于(±1),因此,一般劳倫次变換的行列式也可以是(±1)。

55. 置換　到現在为止,我們討論了許多元素是綫性变換的群的例子。群的概念不一定要和綫性变換的运算相联系而可以用另外性质的运算来建立。現在我們来討論一种前面已經遇到过的运算,就是来討論置換。首先来說明关于置換的几个基本事实和概念。

假設有 n 个任意的物件,象在[2]一样,我們可以把它們編号,即可认为它們就是整数 $1, 2, \cdots, n$。我們知道,我們可以由这些数組成 $n!$ 个排列。取这些排列中的一个

$$p_1p_2\cdots p_n。\qquad (26)$$

所有 p_k 的全体給出从1到 n 的一切整数,而且在排列(26)中它們排列成一定的次序。将排列(26)和基本的排列 $1, 2, \cdots, n$ 比較:

$$P=\begin{pmatrix}1, & 2, & \cdots, & n\\ p_1, & p_2, & \cdots, & p_n\end{pmatrix}。\tag{27}$$

从基本排列到排列 (26) 是由将 1 换成 p_1，2 换成 p_2 等而得到。把这个变换用字母 P 表示并在以后称它为置换。現在来定义逆置换 P^{-1} 的概念。这就是将 (26) 变为基本排列的运算，就是将 p_1 换成 1 将 p_2 換成 2 等的一种运算。我們用特例来說明这一事实：取 $n=5$ 并考虑置换

$$P=\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4, & 5\\ 3, & 2, & 5, & 1, & 4\end{pmatrix}。$$

逆置换为：　$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4, & 5\\ 4, & 2, & 1, & 5, & 3\end{pmatrix}。$$

很容易看出

$$(P^{-1})^{-1}=P。\tag{28}$$

現在来引进**置換的积**的概念。設 P_1 和 P_2 是任意两个置换。置换积 P_2P_1 是这样的一个置换，它是首先实行 P_1，然后实行 P_2 所得的結果。例如，假如我們取两个置换

$$P_2=\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4, & 5\\ 5, & 1, & 4, & 3, & 2\end{pmatrix} \text{和 } P_1=\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4, & 5\\ 3, & 1, & 5, & 2, & 4\end{pmatrix},$$

那么它們的积 P_2P_1 就是置换

$$P_2P_1=\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4, & 5\\ 4, & 5, & 2, & 1, & 3\end{pmatrix}。$$

显然地，逆置换 P^{-1} 由条件

$$P^{-1}P=PP^{-1}=I\tag{29}$$

完全决定，这里我們用 I 表示单位置换，就是把每一个元素都变为自己的置换。

連續实行几个置換，我們就可以組成几个置换的乘积 $P_3P_2P_1$。很容易看出，这样的乘积滿足結合律，即

$$P_3(P_2P_1)=(P_3P_2)P_1。\tag{30}$$

实际上,实行置换 P_1, 然后我們可以实行 P_2 和 P_3, 或者用实行一个置换 (P_3P_2) 来代替連續实行 P_2 和 P_3, 这个置换是与先后实行 P_2 和 P_3 等价的。最后我們指出,单位置换显然满足下列条件

$$IP=PI=P,\tag{31}$$

此处 P 是任意一个置换。置换的乘积一般来說不满足交换律,即 P_2P_1 和 P_1P_2 一般是不同的置换。我們建議用上面的例子来驗明这一事实。

这样,我們对置换建立了乘积,逆置换和单位置换等基本概念,就象以前对綫性变换(矩陣)所建立的这些基本概念一样。現在我們可以继續用类似的方法进一步建立群的概念,即:如果一个置换的集合满足下述两条件:首先,假如某一个置换属于我們的集合,那么它的逆置换也属于这个集合,其次,集合中两个置换的乘积(取任意的次序)仍属于这个集合;那么这个集合就組成一个群。和在綫性变换的情形一样,很明显地单位置换必須属于一个群。

显然,所有 $n!$ 个置换的集合組成一个群,現在来建立另一个群,这个群只由前者的一部分所組成。注意,每一个置换都可由某一些对换得出[2]。而且对于一个已知的置换,对换的数目可以是不同的,但是,我們在前面已証明,对于已知的置换,这个数目的奇偶不变。由偶数个对换組成的置换組成一个群。由全体置换所組成的群一般地称为对称群,而由偶置换,即可分解为偶数个对换的置换,所組成的群称做交替群。

現在来討論一种特殊形式的置换。設 $l_1, l_2, \cdots, l_m$ 是前 n 个数字中的任意 m 个不同的数字。假設我們的置换由将 l_1 换成 l_2, l_2 换成 l_3 等 l_{m-1} 换成 l_m 以及最后 l_m 换成 l_1 所組成。这种形式的置换称做輪换并用符号 $(l_1, l_2, \cdots, l_m)$ 表示。将括号内的数字作

循环置换，我們就得到

$$(l_2, l_3\cdots, l_m, l_1),\ (l_3, l_4\cdots, l_m, l_1, l_2)\cdots$$

等輪換，显然这些輪換都和 $(l_1, l_2, \cdots, l_m)$ 給出同一个置換。如果 $m=1$，即我們有輪換 (l_1)，那么显然地这个輪換与单位置換等价，因此沒有考虑的价值。显然，两个数字的輪換 (l_1, l_2) 与元素 l_1 与 l_2 的对換等价。

假如两个輪換沒有公共元素，那么它們的乘积与因子的次序无关。

例如，假設 $n=5$，且我們有两个无公共元素的輪換的乘积

$$(1, 3)(2, 4, 5) \text{ 和 } (2, 4, 5)(1, 3)。$$

显然，这两个乘积都給出同一个置換：

$$\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5 \\ 3, 4, 1, 5, 2 \end{pmatrix}。$$

我們可以将任一个置換 P 化为沒有公共元素的輪換的乘积。为此，可取元素 1 作为輪換的第一个元素。取 1 經置換 P 后得到的元素作为輪換的第二个元素。設这个元素为 l_2。再取 l_2 經置換 P 所得的元素作为第三个元素，如此继續下去，直到被 P 变为 1 的元素为止。这个将是組成輪換的最后一个元素。不难看出，这个輪換不可能包含相同的元素。这样組成的輪換一般不会包含 n 个元素的全体。从剩下的元素中任取一个作为新的輪換的第一个元素，并且和上面一样組成第二个輪換，等等。

例如，当 $n=6$ 时，取置換

$$\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 3, 6, 4, 1, 2, 5 \end{pmatrix}。$$

应用上面的方式，可以将它化为輪換积的形式

$$\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 3, 6, 4, 1, 2, 5 \end{pmatrix} = (1, 3, 4)(2, 6, 5),$$

而且右边因子的次序对乘积不起作用。

很容易看出，两个对换的乘积可以化成三元輪換的乘积。假如两个二元輪換沒有公共元素，那么，不难驗証，我們有：

$$(l_3, l_4)(l_1, l_2)=(l_1, l_3, l_4)(l_1, l_2, l_4),$$

而当存在公共元素时，有

$$(l_1, l_3)(l_1, l_2)=(l_1, l_2, l_3)。$$

因此，交替群中的每一个置換都可化为三元輪換乘积的形式。

再指出一点，置換的第一行，可用数字的任何次序来代替数字的自然次序。重要的只是，在每一个数字下面应写它經置換后所变成的数字。我們取同一个置換的两种写法作为例子：

$$\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4, 5\\3, 2, 5, 1, 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3, 1, 5, 4, 2\\5, 3, 4, 1, 2\end{pmatrix}。$$

設有某一个置換

$$P=\begin{pmatrix}a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\\b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n\end{pmatrix}。$$

显然我們可以将逆置換写成：

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n\\a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\end{pmatrix}。$$

設有两个置換，而且我們把第二个置換写成两个形式：

$$P=\begin{pmatrix}1, 2, \cdots, n\\c_1, c_2, \cdots, c_n\end{pmatrix};\ Q=\begin{pmatrix}1, 2, \cdots, n\\d_1, d_2, \cdots, d_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1, c_2, \cdots, c_n\\f_1, f_2, \cdots, f_n\end{pmatrix}。$$

我們有：

$$PQ^{-1}=\begin{pmatrix}1, 2, \cdots, n\\c_1, c_2, \cdots, c_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_1, d_2, \cdots, d_n\\1, 2, \cdots, n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_1, d_2, \cdots, d_n\\c_1, c_2, \cdots, c_n\end{pmatrix},$$

因此

$$QPQ^{-1}=\begin{pmatrix}c_1, c_2, \cdots, c_n\\f_1, f_2, \cdots, f_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_1, d_2, \cdots, d_n\\c_1, c_2, \cdots, c_n\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} d_1, & d_2, & \cdots, & d_n \\ f_1, & f_2, & \cdots, & f_n \end{pmatrix}。$$

从上面的写法可以推出下述规则：为了得到置换 QPQ^{-1}，只須对置换

$$P=\begin{pmatrix} 1, & 2, & \cdots, & n \\ c_1, & c_2, & \cdots, & c_n \end{pmatrix}$$

的两行，同时施行置换 Q。

56. 抽象群 在群的定义中，我們可以完全不管那些全体成为群的运算的具体意义(在前面討論的群中，这些运算是綫性变换和置换)。因此我們引向抽象群的概念。

抽象群是某些符号的一个集合，对于这些元素在下述意义下定义了乘法：給定一个規則，按照这个規則从集合中的两个元素 P 和 Q (相异的或相同的) 可得到第三个也属于这个集合的元素，記为 QP。乘法必須滿足下述三个条件：

1. 乘法必須服从結合律，即 $(RQ)P=R(QP)$，由此可一般地推出：在任一个乘积中，可任意結合其中的元素，当然，因子的次序不能改变。

2. 在我們的集合中必須存在唯一的元素 E，用它左乘或右乘任一个元素，仍与这个元素相等，即

$$EP=PE=P。\tag{32}$$

元素 E 称做单位元素。

3. 对集合中任一个元素 P，存在集合中的另一个元素 Q，滿足

$$QP=PQ=E \quad (Q=P^{-1})。\tag{33}$$

当 $P=E$ 时，从(32)得出 $EE=E$，即，根据逆元素的定义，E 的逆元素将是 E 自己 $(E^{-1}=E)$。

可以用較狭的形式来提出定义抽象群的条件，而将其他的条

件作为这些条件的必然的推論，但是我們不准备討論这个。我們只一般地討論和抽象群的概念有关的几个簡单而重要的事实。群論的較詳尽研究，本身可以成为一整本书。我們的目的只是告訴讀者一些基本概念，使之有助于閱讀那些常常应用群的概念与群的基本性质的物理书籍。以后我們有时写 I 来代替 E。由关系式(33)所决定的元素 Q 称为 P 的逆元素并用 P^{-1} 来表示。显然，关系式(28)成立，因为从(33)可推出 P 是 Q 的逆元素。

建立了抽象群的概念以后，我們現在来說明某些新的概念，同时来証明一些抽象群的性质。首先我們要注意，就象前面一样，群的元素数可以是有限的，也可以是无限的。我們来考察群中元素的一个乘积

$$RQP。$$

这也是群中的一个元素。它的逆元素可以照着綫性变換群中得出逆元素的那种方法得到，即

$$(RQP)^{-1}=P^{-1}Q^{-1}R^{-1}。$$

这个很容易用乘法和結合律来驗明。令 P 是群中的某一个元素。它的正整数幂

$$P^0=I,\ P^1,\ P^2,\ \cdots$$

也都是群中的元素。假如存在正整数 m 使得 $P^m=I$，那么就說这个元素是有限阶的，而且使得 $P^m=I$ 成立的最小的正整数 m 称做这个元素的阶。在这种情形之下，元素

$$I,\ P,\ P^2,\ \cdots,\ P^{m-1}$$

之中已不可能有相同的。实际上，从条件 $P^k=P^l\ (k<l)$ 直接得出 $P^{l-k}=I$。显然，在有限群中所有的元素都是有限阶的。

用 P_α 表示我們群中的元素。假如群是有限的，那么可以认为指标 α 取过有限的正整数值。假如群是无限的，那么它可以取过所有的整值[52]，可連續变，甚且可以和有好几个連續变指标的元

素集合等势。設U是我們群中某一个固定的元素。組成所有可能的乘积UP_α。不难看出，当指标α改变时，所写的乘积一次并且只是一次地給出了群中所有的元素。

事实上，若有等式

$$UP_{\alpha_1}=UP_{\alpha_2}$$

則以U^{-1}左乘馬上会得到$P_{\alpha_1}=P_{\alpha_2}$，即对不同的$\alpha$乘积$UP_\alpha$也不相同。現在証明我們群中的任一元素都是这种乘积。事实上，等式$UP_\alpha=P_{\alpha_0}$就等于$P_\alpha=U^{-1}P_{\alpha_0}$，即当所乘的因子$P_\alpha$是群中元素$U^{-1}P_{\alpha_0}$时，乘积$UP_\alpha$就給出元素$P_{\alpha_0}$。如果把固定的元素$U$不写在左边而写在右边我們也得到同样的結果。于是我們有下面的結果。如果P_α通过群中所有的元素而且U是群中某一个固定元素，則乘积UP_α（或$P_\alpha U$）也通过群中所有的元素，而且只通过一次。

我們来看群的一个特别的例子。設群由六个元素組成（六阶群），以下面的字母表示它的元素：

$$E,\ A,\ B,\ C,\ D,\ F。$$

我們以下面的表来定义乘法規則：

	E	A	B	C	D	F
E	E	A	B	C	D	F
A	A	E	D	F	B	C
B	B	F	E	D	C	A
C	C	D	F	E	A	B
D	D	C	A	B	F	E
F	F	B	C	A	E	D

(34)

我們以下面的方式利用这个乘法表来决定乘积。例如我們要找乘积DB，我們就在第一行找出B，在第一列找出D并在对应的行和列的相交处找到元素A，这就是乘积DB。不难相信，在这

情形下，以前用来定义抽象群的所有条件都能满足，而且元素 E 就是单位元素。

在前面几节中，我們有过一些体現群的抽象概念的例子。一种情形是把綫性变换（它的矩陣）作为元素，两个元素的相乘就是相继施行两个綫性变换，也就是使这两个变换的对应矩陣相乘。另一种情形是把置换作为元素，而两个元素的相乘就是接連作两次置换。我們还要引一个群的具体实現的例子。

令所有的复数是群的元素，两个元素的相乘就是对应复数的相加。在这种情形下数零就是单位元素。复数 α 的逆元素就是数 $(-\alpha)$，我們也可以取所有 n-維复空間的矢量 $x(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为元素，即定义元素的相乘就是对应矢量的相加。这时零矢量就是单位元素。换一种說法，就是，R_n 中的矢量是群的元素，而矢量的加法就是群的运算。注意在剛才的两个例子中，群的两个元素的乘积不依賴于相乘的次序，即所謂群中任意两个元素是可交换的，这种群称为阿倍尔群 [45]。最簡单的阿倍尔群的例子是所謂巡回群，它由单位元素 E 和某一元素 P 的方冪所組成。如果 m 是最小的正整数，使得 $P^m = E$，則巡回群包含 m 个元素：$E, P, P^2, \cdots, P^{m-1}$。如果这样的 m 不存在，則巡回群就是无限的：$E, P, P^2, \cdots$。

57. 子群　有某一个群 G，設集合 H 只包含 G 群元素的一部分，而且在原来的乘法运算下成为一个群。在这情形下群 H 称为群 G 的子群。不难看出，仅由 G 群的单位元素所組成的集合永远是一个子群。这种叫做显然子群。以后在說到子群时自然不是指这种显然子群。

把子群 H 的元素記为 H_α，令 G_1 为 G 群中不属于 H 的一个元素。在上面我們已看到，乘积 $G_1 H_\alpha$ 給出 G 中不同的元素，而且这些元素都不属于 H。因为假如我們有指标 α 的两个值 α_1 和

α_2 使 $G_1H_{\alpha_1}=H_{\alpha_2}$，于是 $G_1=H_{\alpha_2}H_{\alpha_1}^{-1}$，卽 G_1 必須属于 H，就与假設的条件矛盾。現在設 G_1，G_2 是群 G 中两个不同的元素，而且它們都不属于子群 H。我們証明，元素的集合 G_1H_α 和 G_2H_α 要就沒有共同的元素，不然它們就互相重合，卽都由同样的元素組成。事实上，如果当指标 α 在取某些値时我們有 $G_2H_{\alpha_1}=G_1H_{\alpha_2}$，則有 $G_2=G_1H_{\alpha_1}H_{\alpha_2}^{-1}=G_1H_{\alpha_3}$，卽 G_2 属于元素 G_1H_α 組成的集合，同样 G_1 属于元素 G_2H_α 組成的集合。由此推出乘积 G_1H_α 和 G_2H_α 决定相同的元素集合。

取子群 H 中所有的元素 H_α。它們还不是所有 G 的元素。現在看某一个不属于 H 的元素 G_1，做出所有可能的乘积 G_1H_α，由前面可以看出所有这些元素都与 H_α 不同。

可能元素 H_α 及 G_1H_α 还不組成 G。就取某一个旣不属于 H_α 一类，也不属于 G_1H_α 类的元素 G_2，然后做出所有可能的乘积 G_2H_α。由上面看出，元素 G_2H_α 与所有的 H_α 及 G_1H_α 都不同。如果元素 H_α，G_1H_α，G_2H_α 还不組成 G，則再取某一元素 G_3，它不属于上述三个集合，然后組成所有的乘积 G_3H_α，于是我們就得到 G 的新的元素，如此一直做下去。我們假設只經过有限个这种步驟就得到了所有 G 的元素。可設需要取 $(m-1)$ 个元素 G_k 才能达到这种情形。在这情形下所有 G 群的元素都可以表作下面的形式：

$$H_\alpha,\ G_1H_\alpha,\ G_2H_\alpha,\ \cdots,\ G_{m-1}H_\alpha, \tag{35}$$

其中指标 α 通过对应于子群 H 的所有的値。如果令 α_0 为任意定値，設 $G_k'=G_kH_{\alpha_0}$，則如前所見，元素 $G_k'H_\alpha$ 的集合，将与元素 G_kH_α 的集合重合。換句話說，在每个集合 $G_kH_\alpha(G_0=I)$ 里，集合中的任意元素都可以作 G_kH_α 的代表。于是立刻推出，在給定子群 H_α 后，如 (35) 形式的 G 群元素的划分就完全确定了。集合 G_kH_α 称为对于子群 H_α 的共軛集合。

在 (35) 所考虑的情形中，子群 H 称为有限指数的子群，其指数为 m。如果 G 是有限群，則显然子群 H 的指数就等于以 H 的阶除 G 的阶所得的商，而有限群所包含元素的个数就被称为有限群的阶。注意在 (35) 的集合中，只有第一个是子群。其他每一个 $G_k H_\alpha$ 都不包含单位元素，因而就不是子群。

在构成 (35) 时，我們在子群 H 的元素 H_α 的左边乘上 G 的元素 G_k。我們也可以从右边来乘。引进另一 G'_k 代替 G_k，我們可以用同样的方法得出 G 群元素的表示：

$$H_\alpha,\ H_\alpha G'_1,\ H_\alpha G'_2,\ \cdots,\ H_\alpha G'_{m-1}, \tag{36}$$

而且我們要証明，子群的指数 m 是不变的。有时我們称元素 $G_k H_\alpha$ 的集合为左共軛集合，而称 $H_\alpha G'_k$ 为右共軛集合。

首先注意，如果 α 通过所有对应于子群 H 的值，則元素 H_α^{-1} 就給出 H 的所有元素。这可从 H 中某元素的逆元素也属于 H 这一事实直接推出。現在就来証明左右共軛集合的指数相等。在 (35) 中任取两个不同的集合 $G_p H_\alpha$ 和 $G_q H_\alpha (p \neq q)$。对 (35) 的第一个可以认为是 $G_p = E$。取逆元素：

$$(G_p H_\alpha)^{-1} = H_\alpha^{-1} G_p^{-1} \text{及} (G_q H_\alpha)^{-1} = H_\alpha^{-1} G_q^{-1}。$$

用上面所提的附注，我們可以把这些元素集合重写为 $H_\alpha G_p^{-1}$ 及 $H_\alpha G_q^{-1}$ 的形式。不难看出，它們沒有共同的元素。因为如果我們有

$$H_{\alpha_1} G_p^{-1} = H_{\alpha_2} G_q^{-1},$$

則推出 $\quad G_p^{-1} G_q = H_{\alpha_1}^{-1} H_{\alpha_2} = H_{\alpha_3}$，或 $G_q = G_p H_{\alpha_3}$，

就是說 G_q 就要属于集合 $G_p H_\alpha$，而这是不可能的。于是集合

$$H_\alpha,\ H_\alpha G_1^{-1},\ H_\alpha G_2^{-1},\ \cdots,\ H_\alpha G_{m-1}^{-1}$$

就是右共軛集合，所以在 (36) 中可以簡单地取 $G'_s = G_s^{-1}$。

我們来看几个子群的例子。令 G 为三个变数的实正交变换集合，而 H 是行列式为 $+1$ 的三个变数的实正交变换集合。每个实

正交变换或者是轉动，即属于 H，或者是一个轉动乘上一个对于原点的对称变换，它可以用下面的式子来表示：

$$x'=-x;\ y'=-y;\ z'=-z_{\circ}\ (S) \tag{37}$$

在这情形下 G 就表成下面的形式：

$$H_{\alpha},\ SH_{\alpha} \tag{38}$$

或

$$H_{\alpha},\ H_{\alpha}S, \tag{39}$$

其中，H_{α} 指 H 群所有元素的集合。在这情形下 H_{α} 是指数为 2 的子群。

令 G 为由 n 个元素的置换所組成的对称群，H 为由所有偶置换所組成的交替群。再令 S 为任一固定的奇置换，例如由一个輪换 (1, 2) 所組成的置换，即元素 1 和 2 的对换。显然我們可以把 G 表成(38)或(39)的形式。乘在左边和右边的两种情形給出同一結果。

在这个情形下，交替群为对称群的一个指数为 2 的子群。

再来討論前面已經讲到过的正八面体的有限群。設 A 是八面体的某一个頂点而 l 是通过这个頂点的一个軸。設 S_0, S_1, S_2, S_3 为以角度 0, $\frac{\pi}{2}$, π 和 $\frac{3}{2}\pi$ 圍繞此軸的轉动。这四个轉动組成八面体的轉动群的一个子群。用 $T_k(k=1, 2, 3, 4, 5)$ 表示将頂点 A 变为八面体的其他五个頂点的轉动，我們可以把整个八面体群写成下面的結构：

$$S_{\alpha},\ T_1S_{\alpha},\ T_2S_{\alpha},\ T_3S_{\alpha},\ T_4S_{\alpha},\ T_5S_{\alpha},$$

这里子群 S_{α} 是一个指数为 6 的子群。

令 G_s, $G_s^{-1}(s=1, 2, \cdots, k)$ 为群 G 中任意一些元素。考虑由所有 G 中可以表为 G_s, $G_s^{-1}(s=1, 2, \cdots, k)$ 的乘积的元素的集合。

显然，这个集合組成一个群，这个群是 G 的一个子群或者就是 G。

我們說，这个子群由所与元素 G_s, $G_s^{-1}(s=1, 2, \cdots, k)$ 的集合所产生。

58. 类和正規子群 設 U 和 V 是群中的某两个元素。元素 $W=VUV^{-1}$ 称做 U 的共軛元素。不难看出，U 也将是 W 的共軛元素。因为，$U=V^{-1}WV$。两个元素 U_1 和 U_2 如果都和同一个元素 W 共軛：

$$U_1=V_1WV_1^{-1};\ U_2=V_2WV_2^{-1},$$

那么，它們将是相互共軛的：

$$U_2=V_2V_1^{-1}U_1(V_2V_1^{-1})^{-1}。$$

所有相互共軛的元素的集合組成所謂群的类。一个类被任意一个元素 U 所完全决定。事实上，給了 U，我們根据公式 $G_\alpha UG_\alpha^{-1}$ 可得到整个类，此处 G_α 通过群的全体元素。因此，我們可以将整个群分成一些类。应用我們在[56]中所叙述的单位元素的基本性质，我們有：

$$G_\alpha IG_\alpha^{-1}=I,$$

这就是說，单位元素本身組成一个类。

假如元素 U 的阶是 m，即假如 m 是最小的正整数使得 $U^m=$ $=I$，那么所有的共軛元素 $G_\alpha UG_\alpha^{-1}$ 也都有相同的阶 m，这一事实可由下列等式直接推出：

$$(G_\alpha UG_\alpha^{-1})^m=G_\alpha U^mG_\alpha^{-1}=I。$$

即，在同一个类中的元素都有相同的阶。

注意，当 G_α 取过群 G 中所有的元素时，乘积 $G_\alpha UG_\alpha^{-1}$ 可能不止一次地給出类中的元素。例如，假如 $U=I$，那么上述乘积永远是 I。

我們仍旧取八面体的轉动群作为例子。令 U 为以角度 $\frac{\pi}{2}$ 圍繞八面体的某一个軸 A_pA_q 的轉动。如果八面群中的一个轉动 T_k 将軸 l 变为 l_1 而且将頂点 A_p 变为 A_r，A_q 变为 A_s，那么，群元素

$T_k U T_k^{-1}$ 将是以角度 $\frac{\pi}{2}$ 圍繞 $A_r A_s$ 軸的轉动。例如，如果 T_k 将 A_p 变为 A_q，那么所述乘积将是一个圍繞軸 $A_q A_p$，角度为 $\frac{\pi}{2}$ 的轉动，也就是一个圍繞 $A_p A_q$ 軸，角度为 $\frac{3\pi}{2}$ 的轉动。假如 T_k 保持 $A_p A_q$ 不变，即 T_k 圍繞此軸而轉动，那么乘积 $T_k U T_k^{-1}$ 与 U 重合。在这个情形下，类中的与 U 共軛的元素是所有圍繞八面体的軸，角度为 $\frac{\pi}{2}$ 的轉动的集合。

相同地，如果我們看三維空間繞原点的轉动群，我們知道，群中每一个元素 U 都是繞某一根軸轉角度 φ 的轉动。在这个情况下，与 U 共軛的元素的集合就是所有的繞一切可能的通过原点的軸轉角度 φ 的轉动的集合。

和类的概念紧密連系着的有另一个重要的概念，即我們就将討論的正規子群的概念。設 G 是某一个群而 H 是它的一个子群。令 G_1 是群 G 中某一个固定的元素。考虑所有乘积

$$G_1 H_\alpha G_1^{-1} \tag{40}$$

的集合，这里我們用 H_α 来表示子群中可变的元素，即 H_α 取遍子群 H 中所有的元素。不难看出，乘积(40)也組成一个子群。事实上，例如取集合(40)中的两个元素的乘积，那么它也属于这个集合：

$$(G_1 H_{\alpha_2} G_1^{-1})(G_1 H_{\alpha_1} G_1^{-1}) = G_1 H_{\alpha_2} H_{\alpha_1} G_1^{-1} = G_1 H_{\alpha_3} G_1^{-1},$$

同样地，群的其他条件也都满足。

子群(40)称做 H 的相似子群，并且如果 G_1 属于子群 H，那么子群(40)也由 H 的元素所組成，而且不难看出，它就和 H 重合。

在这个情形下，子群 H 中的元素 H_{α_0} 都可根据公式(40)而得到，只要我們取

$$H_\alpha = G_1^{-1} H_{\alpha_0} G_1。$$

假如元素 G_1 不属于子群 H，那么子群(40)可能和子群 H 不一样。

如果对于群 G 中任意的元素 G_1，子群 (40) 都和 H 重合，那么子群 H 就叫做群 G 的正規子群。我們以后将引进一些正規子群的例子，現在先来說明几个与正規子群有关的新概念。

假設 H 是群 G 的一个正規子群。为了书写方便起見我們假定这个子群的指数是 m。在这个情形，群 G 的全体元素可写成：

$$H_\alpha,\ G_1H_\alpha,\ G_2H_\alpha,\ \cdots,\ G_{m-1}H_\alpha, \tag{41}$$

这里的 H_α 和在其他地方一样是子群 H 的变元素。

H 既然是正規子群，那么元素 $G_kH_\alpha G_k^{-1}$ 的集合与元素 H_α 的集合重合，即元素 G_kH_α 的集合与元素 $H_\alpha G_k$ 的集合重合。

因此，如果 H 是正規子群，那么将群中元素按照公式 (41) 分为共軛集合的分法与按照下述方式

$$H_\alpha,\ H_\alpha G_1,\ H_\alpha G_2,\ \cdots,\ H_\alpha G_{m-1} \tag{42}$$

将元素分成共軛集合的分法相重合。

换言之，在这种情形下，右共軛集合和左共軛集合相重。

假如 H_{α_0} 是正規子群中某一个元素，那么对于 G 中任一个 G_0，元素 $G_0H_{\alpha_0}G_0^{-1}$ 仍属于这个正規子群，即，假如某一个元素属于一个正規子群，那么整个的該元素在基群 G 中所属的一类都属于这个正規子群，反过来，我們不难証明，假如某一个子群有那个性质，即，当它包含某一个元素时，它也包含整个的該元素在基群 G 中所属的一类，那么这样的群是一个正規子群。

現在我們来討論 (41) 或 (42) 中的共軛集合，此处元素 H_α 組成正規子群。考虑某一个共軛集合的元素 G_lH_α 和共軛集合的元素 $G_kH_{\alpha'}$ 的乘积 $G_lH_\alpha G_kH_{\alpha'}$。

我們可以把这些乘积的集合写成下列形式。

$$G_l(H_\alpha G_k)H_{\alpha'},$$
$$G_lG_kH_\alpha H_{\alpha'}。$$

元素 H_α 和 $H_{\alpha'}$ 包含在正規子群 H 中，因此它們的乘积也在

H 中。因此，我們可以把上述的乘积写为：

$$G_l G_k H_\alpha。$$

所有这样的元素都在同一个共軛集合，即包含元素 $G_l G_k$ 的集合中。也很容易看出，这个共軛集合中的所有的元素都可以这样得到。換句話說，如果子群是正規的，那么，一个共軛集合和另一个共軛集合相乘所給出的也是一个共軛集合。我們把每个共軛集合看作某一种新的元素，而且把表(41)，(38)中的第一个共軛集合作为单位元素。上述关于共軛集合相乘的結果給我們一个新元素相乘的規則，而且这个乘法規則滿足群的所有条件(这是容易看出的，我們留給讀者去驗算)，这就是說，我們所引进的新的元素在所指出的乘法規則下組成一个群，在这个群中，表中第一个共軛集合是单位元素。这个新的群，它的阶等于正規子群 H 的指数，称为 H 的补群或者商群。

每一个群 G 都有两个显然的正規子群：一个由单个单位元素組成，另一个与整个群重合。

在以后我們說到正規子群时，将认为它不是上面所提到的两个显然正規子群。有时可能一个群沒有一个正規子群。

这样的群叫做单純群。

59. 例 1. 考慮三維空間的实正交变换群 G。令 H 为运动的子群，即行列式为 $(+1)$ 的正交变换的集合。再令 S 为由公式(37)所决定的关于原点的对称变换。例如 H_α 是 H 中的变元素，那么整个群 G 可以写成下述方式：

$$H_\alpha,\ SH_\alpha \text{ 或 } H_\alpha,\ H_\alpha S。 \tag{43}$$

假如 G_1 是 G 中的任意一个变换，那么 $G_1 H_\alpha G_1^{-1}$ 的行列式是 $(+1)$，即 $G_1 H_\alpha G_1^{-1}$ 属于 H 而 H 是指数为 2 的正規子群。考慮 H 的商群。(43) 中的第一个集合組成这个群的单位元素。第二个集合中两个元素的乘积，即两个行列式为 (-1) 的正交变换的乘积，是行列式为 $(+1)$ 的正交变换，属于第一个集合。例如 K 是对应于第二个集合的元素，那么就有 $K^2=E$。因此，H 的商群由两个元素 E 和 K 組成，且 $K^2=E$，这就是說，这是一个二阶巡回群。对于指数为 2 的正規子群，这一事实普遍成立。

2. 对于置换的对称群，交替群为指数为 2 的正規子群。

写下三个元素的对称群的元素，并应用[55]中的表示，給每一个元素一个符号：

E; $A=(2,3)$; $B=(1,2)$; $C=(1,3)$; $D=(1,3,2)$; $F=(1,2,3)$。

由置换 E, D, 和 F 所組成的交替群是一个三阶巡回群，($F=D^2$ 和 $D=F^2$)并且 $D^3=$ $=F^3=E$。整个对称群由三个类所組成：I E; II A, B 和 C; III D 和 F。

交替群也由三个类所組成：I E; II D; III F。不难驗算，这个对称群中元素相乘的規則和[56]中表(34)所規定的一样。

当 $n=4$ 时，交替群包含 12 个元素，它們分成四个类：

$$\text{I}\ E;\ \text{II}\ A_1=(1,2)(3,4);\ A_2=(1,3)(2,4);\ A_3=(1,4)(2,3);$$

$$\text{III}\ B_1=(1,2,3);\ B_2=(2,1,4);\ B_3=(3,4,1);\ B_4=(4,3,2);$$

$$\text{IV}\ C_1=(1,2,4);\ C_2=(2,1,3);\ C_3=(3,4,2);\ C_4=(4,3,1)。$$

第二个类包含三个二阶元素，而第三和第四个类包含四个三阶元素。不难驗算，第二个类中两个元素的乘积仍是第二个类中的元素，并且因为所有的二阶元素都在第二个类中，我們可以断定：这三个元素加上单位元素組成这个交替群的一个正規子群。这个子群的阶是 4，而它的指数是 3。很容易看出，第三个集合中的元素 B_i 是这个正規子群的同一个共軛集合中的元素，而元素 C_i 在另一个共軛集合中。其次不难看出，第三类中两个元素的乘积是第四个类中的一个元素，而第四个类中两个元素的乘积是第三个类中的一个元素。在商群中，这个正規子群对应于单位元素 E。設 A 和 B 是商群的另两个元素。我們可以由上面所説的事实直接推出：$A^2=B$ 和 $B^2=A$，并且显然商群是由元素 E, A 和 A^2 所組成并且 $A^3=E$，是一个三阶巡回群。

注意，原来的交替群中的元素 E, $(1,2,3)$ 和 $(2,1,3)$ 組成一个三阶巡回子群，但是这个子群不是正規的。

例如我們以任何一种次序将四面体的頂点編号，那么很容易直接檢驗，上面所説的 $n=4$ 时的交替群对应于那些将四面体变为自己的轉动。每一个置换决定一个頂点的变化。第三个类中的置换对应于以角度 $\frac{2}{3}\pi$ 圍繞四面体的一个軸的一个轉动，而圍繞同一个軸以同一个角度的相反方向的轉动則是第四个类中的一个置换。第二个类中的置换是四面体的这样一些变换：在这些变换下，沒有一个頂点保持不变。

可以証明，当 $n>4$ 时，交替群是一个单純群。

3. 假如有一个阿倍尔群 G 和它的任一个子群 H，那么对于任意选擇的 H 中的元素 H_α 和 G 中的 G_1，都有 $G_1H_\alpha=H_\alpha G_1$，即 $G_1H_\alpha G_1^{-1}=H_\alpha$，由此可以直接看出，$H$ 是正規子群，这就是説，阿倍尔群的任一个子群都是正規的。作为一个例子，我們来討論 R_n 中矢量的加法群 G，关于 R_n 我們在[49]已經討論过。

我們取属于 R_n 的某一个子空間 $L_k(0<k<n)$ 的矢量作为子群 H。共軛集合由加 R_n 中某一个矢量 x 于子空間 L_k 中的矢量而得到。

假如 x 属于 L_k，那么共軛集合与子群 H 重合。在 L_k 取 $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(k)}$，在

它的相补子空間 M_{n-k} 中取基础矢量 $x^{(k+1)}, \cdots, x^{(n)}$。由于前面所讲过的原因，每一个元素的共轭集合由矢量

$$c_1 x^{(1)}+c_2 x^{(2)}+\cdots+c_k x^{(k)}+c_{k+1} x^{(k+1)}+\cdots+c_n x^{(n)}$$

所組成，这里 $c_{k+1}, \cdots, c_n$ 有固定的值，而 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 可以取任意的值。

因此，我們可以將每一个共轭集合与 M_{n-k} 中的一个确定矢量相对应，反之，M_{n-k} 中的每一个矢量都对应于一个确定的共轭集合。任两个共轭集合中两个矢量的相加对应于与这两个集合对应的 M_{n-k} 中的矢量的相加。換句話說，补群的元素可以认为是 M_{n-k} 中的矢量，运算就是原来的群的运算(矢量的加法)。

在这个例子中，正規子群 H 的阶和它的指数都是无穷的。

60. 群的同构和准同构 两个群 A 和 B 称做是同构的，如果在它們的元素間可以建立这样的一个对应：A 中每一个元素都对应于 B 中一个确定的元素并且反之 B 中每一个元素都对应于 A 中一个确定的元素 (1－1 对应)，而且这个对应是这样的：A 中任两个元素的乘积对应于 B 中对应元素的乘积。假如 A 和 B 是同构的抽象群，那么它們具有完全相同的构造，也就是說，它們在本质上是沒有什么不同的。

現在来建立一个新的概念，这个概念是群的同构概念的推广。群 B 称做是和 A 准同构，假如 A 中每一个元素对应于 B 中一个确定的元素而且 B 中每一个元素对应于 A 中至少一个元素，而且这个对应是这样的：A 中两个元素的乘积对应于 B 中对应元素的乘积。在这种情形，所不同于群的同构的，是对应不必是 1－1 可逆的，即群 B 中同一个元素可以对应于群 A 中某几个不同的元素。假如群 B 准同构于群 A，而且 B 中每一个元素都对应于 A 中一个确定的元素，那么这两个群也將是同构的。此外，我們可看出，如果 A 中的元素 A_1 和 A_2 对应于 B 中的元素 B_1 和 B_2，那么，根据定义，A 中的元素 $A_2 A_1$ 对应于 B 中的元素 $B_2 B_1$。

設 A_0 是 A 的单位元素而 B_0 是它在 B 中的对应元素。不难証明，B_0 也是单位元素。事实上，对于 A 中任一 A_1 都有等式

$$A_0 A_1=A_1 A_0=A_1,$$

由此引出 B 中对应元素的等式:

$$B_0 B_1 = B_1 B_0 = B_1,$$

而且根据准同构的定义，B_1 可以认为是 B 中任意的元素。最后一个等式說明 B_0 是群 B 的单位元素。因此，在同构和准同构群中，A 的单位元素对应于 B 的单位元素。現在取 A 的两个互逆元素 A_1 和 A_1^{-1} 并令 B_1 和 B_2 是 B 中对应的元素。按照准同构群的定义，等式 $A_1 A_1^{-1} = A_1^{-1} A_1 = A_0$，此处 A_0 是单位元素，給出等式 $B_1 B_2 = B_2 B_1 = B_0$，此处 B_0 根据上面所証是单位元素，因此 $B_2 = B_1^{-1}$，这就是說，A 中的互逆元素对应于 B 中的互逆元素。

假設两个群只是准同构而非同构。我們来討論群 A 中对应于 B 的单位元素 B_0 的元素 C_α 的集合。假如 C_α 对应于 B_0，那么如上面所說 C_α^{-1} 对应于 $B_0^{-1} = B_0$，并且每一个乘积 $C_{\alpha_2} C_{\alpha_1}$ 也都对应于 $B_0 B_0 = B_0$，这就是說，A 中对应于 B 的单位元素的元素的集合組成群 A 的一个子群 C。

現在来說明这个子群是正規子群。事实上，令 A_1 是群 A 中任意一个元素而 B_1 是 B 中的对应元素。每一个形式为 $A_1 C_\alpha A_1^{-1}$ 的元素对应于 B 中的元素 $B_1 B_0 B_1^{-1}$，或者，由于单位元素的基本性质，我們可以断定，每一个形式为 $A_1 C_\alpha A_1^{-1}$ 的元素都对应于 B 的单位元素，这就是說，每一个形式为 $A_1 C_\alpha A_1^{-1}$ 的元素都是元素 C_α 中的一个，即，它属于子群 C，因此，这个子群 C 是一个正規子群。現在来討論按照

$$C_\alpha,\ A_1 C_\alpha,\ A_2 C_\alpha,\ \cdots \tag{44}$$

而将群 A 分为共軛集合的分法。

設 B_k 是对应于 A_k 的元素。我們取属于同一个共軛集合的两个元素 $A_k C_{\alpha_1}$ 和 $A_k C_{\alpha_2}$。它們对应于元素 $B_k B_0$ 和 $B_k B_0$，即对应于 B 中的同一个元素 B_k。

不同的共軛集合中的元素 $A_k C_\alpha$ 和 $A_l C_\alpha$ 对应于元素 B_k 和

B_l，我們来証明。这两个元素 B_k 和 B_l 是不同的。事实上，假如它們是相同的，那么元素 $A_k^{-1}A_l$ 就对应于 B 中的单位元素 B_0，这就是說，元素 $A_k^{-1}A_l$ 必須是元素 C_α 中的一个，即 $A_k^{-1}A_l=C_{\alpha_0}$，亦即 $A_l=A_kC_{\alpha_0}$，这与(44)相矛盾。因此，假如群 B 准同构于群 A，那么，A 中对应于 B 中的单位元素的那些元素的集合，組成正規子群，而且这个正規子群的每一个共轭集合都由对应于 B 中同一个元素的全体元素所組成。除此以外，由准同构群的定义可以直接推出：不同的（或者同一个）共轭集合中任意两个元素的乘积对应于群 B 中那些元素的乘积，这元素是对应于所說的共轭集合，換言之，即 A 的每一个共轭集合都对应于 B 中确定的元素，不同的共轭集合对应于 B 中不同的元素，而且这个对应是群 A 中 C_α 的商群与群 B 的一个同构对应。

再取三維空間的实正交变换群作为例子，将每一个变换与等于此变换的行列式的数相比較，并且在这些数的集合內以一般数的乘法定义这些数的乘法。在这个情形下，我們的群就和由两个元素(+1)和(−1)所組成的群准同构，在这个群中，两个数的乘法是和一般数的乘法一样的。单位元素是(+1)。在这个例子中，正規子群就是轉动群。

假如群 B 准同构但不同构于群 A，那么群 A 中对应于群 B 的单位元素的那些元素的集合，通常叫做准同构的核。我們知道，准同构核是群 A 的一个正規子群。

61. 例 1. 取三維空間的实正交变换群 G，将每一个变换与等于此变换的行列式的数相对应，并且規定一般数的乘法为这些数的群的运算。在这个运算之下，由数(+1)和(−1)根据一般数的乘法定义所組成的群 G' 就准同构于 G。群 G' 的单位元素对应于 G 中的三度空間的轉动。这些轉动組成一个正規子群，而它的商群是一个二阶巡回群[58]。

2. 在平面 XY 上取頂点为：

$$(1,0);(\cos 120°,\ \sin 120°);\ (\cos 240°,\ \sin 240°)$$

的正三角形。取群 G，它由(1)平面以角度 $0°$，$120°$，$240°$ 圍繞原点的轉动，在这些轉动下，三角形变为自已，及(2)：平面作一对称于 X 軸的反射再作角度为 $0°$，$120°$，$240°$ 的轉动。这就是 $n=3$ 时的二面体群。

写下对应于这个群的元素的所有矩陣：

$$E=\left\|\begin{matrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{matrix}\right\|;\ A=\left\|\begin{matrix}1, & 0\\ 0, & -1\end{matrix}\right\|;\ B=\left\|\begin{matrix}-\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}\sqrt{3}\\ \frac{1}{2}\sqrt{3}, & \frac{1}{2}\end{matrix}\right\|;$$

$$C=\left\|\begin{matrix}-\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}\sqrt{3}\\ -\frac{1}{2}\sqrt{3}, & \frac{1}{2}\end{matrix}\right\|;\ D=\left\|\begin{matrix}-\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}\sqrt{3}\\ -\frac{1}{2}\sqrt{3}, & -\frac{1}{2}\end{matrix}\right\|;$$

$$F=\left\|\begin{matrix}-\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}\sqrt{3}\\ \frac{1}{2}\sqrt{3}, & -\frac{1}{2}\end{matrix}\right\|。$$

假如我們观察一下由[**56**]中表(34)所决定的乘法結构，那么就可看出，这个乘法表又与我們这个群的矩陣的乘法相对应。以前我們在[**59**]看到，这个乘法表也对应于三个元素的置换的对称群：

$$E;\ A=(2,3);\ B=(1,2);\ C=(1,3);\ D=(1,3,2);\ F=(1,2,3)。\qquad (45)$$

因此，如果我們把这两个群中以同一个字母表示的元素看作对应元素，那么这两个群是同构的。如果我們把这三个頂点用对应的方法編号的話，群(45)中的置换对应于上面提起过的三角形的頂点的置换。

就和我們在[**59**]中所提起的完全一样，四面体群与 $n=4$ 的置换群同构。

3. 可以用一般的方法指出准同构于一个已知群 G 的置换群的构造。設 H 是群 G 的某一个具有有窮指数 n 的子群。写下对应于 H 的元素的共軛集合：

$$H,\ HS_1,\ HS_2,\ \cdots,\ HS_{n-1}。$$

假如我們用 G 中某一个元素 S 在乘这些集合中的每一个，那么只对这些集合的次序作了一个置换，因此可以认为 G 中的元素 S 对应于这个置换。不难指明，这样所得到的置换群 G' 准同构于群 G。

G 中的元素 S 对应于 G' 的单位元素的充要条件是以 S 右乘每一个共軛集合时，这些集合都不变，即

$$H_\alpha S=H_\beta \text{ 且 } H_\alpha S_k S=H_\beta S_k \quad (k=1,2,\cdots,n-1)$$

此处 H_α 是 H 中任意的元素，H_β 也属于 H。上面所写的等式可以改写成

$$S=H_\alpha^{-1}H_\beta$$

和

$$S=(S_k^{-1}H_\alpha S_k)^{-1}(S_k^{-1}H_\beta S_k),$$

从这两个等式可推出 S 对应于 G' 的单位元素的充要条件为：S 同时属于 H 和所有的相似的群 $S_k^{-1}HS_k$。

假如 H 是 G 的正规子群，那么上述条件就变为 S 属于 H，并且在这种情形下 G' 与商群同构。假如 H 只含有一个单位元素，那么群 G 与置换群 G' 同构，这个置换群由下法得到：假如群 G 的元素是

$$E_1,\ S_1,\ S_2,\ \cdots,\ S_n$$

以 G 中的任意一个元素右乘，就得到一个 G 中元素的置换。以下我們将要仔細地討論与一个已知群同构的綫性变换群的构造。

62. 測地投影 在結束了一般群論基础的介紹之后，我們来討論一个特别的群的对应的例子，这个例子在物理中是很重要的。首先来說明測地投影的概念，这个概念給予球面上的点和平面上的点的对应以一个确定的規則。

考虑坐标軸为 XYZ 的三維空間及中心在原点半徑为 1 的球面 C。設 S 是球面上一个点，其坐标为 $(0,\ 0,\ -1)$，M 是球面上的流动点(图 3)。直綫 SM 与平面 XY 相交于某一点 P，这样我們就有了使球面 C 上的点和平面 XY 上的点相对应的确定的法則。所建立的对应給予我們一个从球面到平面的測地投影。

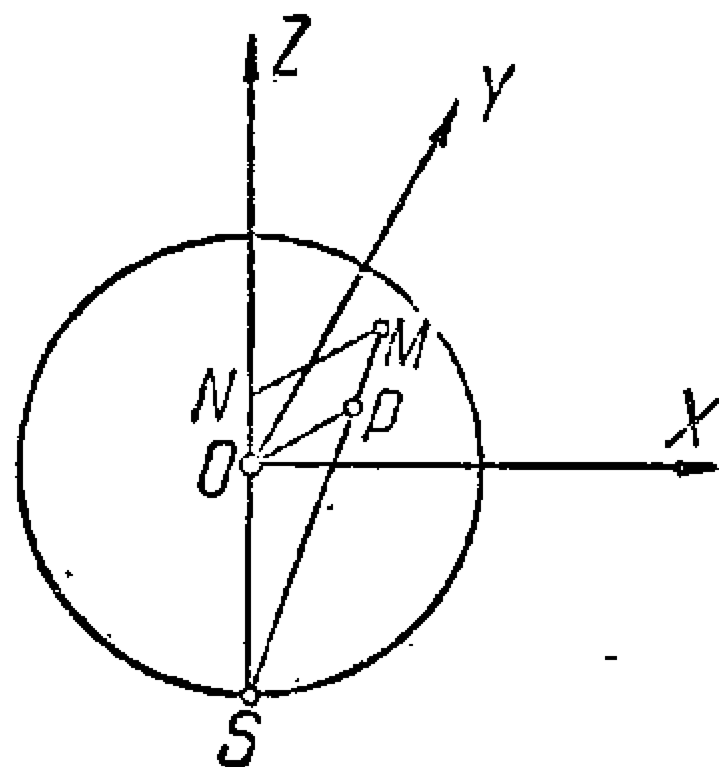


图 3

現在来找測地投影的公式。令 MN 为从 M 点到 Z 軸的垂直綫。因为 $SO=1$，由于两三角形的相似，我們有：

$$NM=(1+ON)OP。\qquad (46)$$

用 $(x,\ y,\ z)$ 表示点 M 的坐标并用 $(\alpha,\ \beta)$ 表示 P 的坐标，就可写成：

$$NM=(1+z)OP,$$

或者，将平行綫段 OP 和 NM 射影于 X 軸和 Y 軸，得

$$x=(1+z)\alpha;\ y=(1+z)\beta。 \tag{47}$$

方程 $x^2+y^2+z^2=1$ 給予我們一个 z 的二次方程:

$$(\alpha^2+\beta^2)(1+z)^2+z^2=1,$$

解这个方程,得

$$z=\frac{\pm 1-(\alpha^2+\beta^2)}{1+(\alpha^2+\beta^2)}。$$

但是对于所有有穷远点 (α, β) 必須有 $z>-1$, 因此, 在上面公式中我們必須取$(+1)$。再应用公式(47),我們就得到用(α, β)表示(x, y, z)的表示式:

$$x=\frac{2\alpha}{1+\alpha^2+\beta^2};y=\frac{2\beta}{1+\alpha^2+\beta^2};z=\frac{1-(\alpha^2+\beta^2)}{1+\alpha^2+\beta^2}。 \tag{48}$$

我們引进一个复坐标 $\zeta=\alpha+i\beta$ 来代替平面上的两个实坐标 α 和 β。和平常一样,用 $\bar{\zeta}$ 来表示 ζ 的共軛复数,我們就可把上面的公式写成下面的样子:

$$x+iy=\frac{2\zeta}{1+\zeta\bar{\zeta}};x-iy=\frac{2\bar{\zeta}}{1+\zeta\bar{\zeta}};z=\frac{1-\zeta\bar{\zeta}}{1+\zeta\bar{\zeta}}。 \tag{49}$$

将复变数 ζ 表成另两个复数 ξ 和 η 的比:

$$\zeta=\frac{\eta}{\xi}。 \tag{50}$$

ξ 和 η 相差一公因子的几对值, 即形式为 $k\xi$, $k\eta$ 的几对值和 ξ, η 給出同一个 ζ, 即同一个平面上的点,并且一对值 $\eta\neq 0$, $\xi=0$ 将給出平面上的无穷远点。复数ξ和η称做平面上的复齐次坐标。应用(50)并将实数部分和复数部分分开,我們可以将公式 (49) 写成:

$$x=\frac{\bar{\xi}\eta+\xi\bar{\eta}}{\xi\bar{\xi}+\eta\bar{\eta}};y=\frac{1}{i}\frac{\bar{\xi}\eta-\xi\bar{\eta}}{\xi\bar{\xi}+\eta\bar{\eta}};z=\frac{\xi\bar{\xi}-\eta\bar{\eta}}{\xi\bar{\xi}+\eta\bar{\eta}}。 \tag{51}$$

对于任意的复数值 ξ 和 η, 最后的公式給我們以实的(x, y, z)滿足关系式:

$$x^2+y^2+z^2-1=0, \qquad (51_1)$$

这就是我們所需要的，因为点 (x, y, z) 在单位球面上。

63. U 群和轉动群 現在来討論变数 (ξ, η) 的某一个 U 变換：

$$\left.\begin{aligned}\xi'&=a\xi+b\eta,\\ \eta'&=c\xi+d\eta,\end{aligned}\right\} \qquad (52)$$

并且因为是 U 变換，所以必須有：

$$\xi'\bar{\xi}'+\eta'\bar{\eta}'=\xi\bar{\xi}+\eta\bar{\eta}。 \qquad (53)$$

新的变数值 (ξ', η') 給我們以球面上的新的点：

$$x'=\frac{\bar{\xi}'\eta'+\xi'\bar{\eta}'}{\xi'\bar{\xi}'+\eta'\bar{\eta}'};\ y'=\frac{1}{i}\ \frac{\bar{\xi}'\eta'-\xi'\bar{\eta}'}{\xi'\bar{\xi}'+\eta'\bar{\eta}'};\ z'=\frac{\xi'\bar{\xi}'-\eta'\bar{\eta}'}{\xi'\bar{\xi}'+\eta'\bar{\eta}'}。 \qquad (54)$$

显然 U 变換 (52) 的行列式的模等于 1，可以用形式为 $e^{i\varphi}$ 的某一个数来表示。以 $e^{-i\frac{\varphi}{2}}$ 乘变換 (52) 中所有的系数，我們就得到一个行列式为 1 的 U 变換。但是其中的 ξ' 和 η' 也乘上了 $e^{-i\frac{\varphi}{2}}$。这个增加的因子完全不影响量 ζ。因此我們可以用下述条件来限制所討論的 U 变換 (52)，变換的行列式等于 1，即

$$ad-bc=1。 \qquad (55)$$

甚至在这个限制条件之下，系数相差一个符号的两个变換所給出的 ξ' 和 η' 值就只相差符号，在这两个变換之下我們也将得到同一个点 ζ'。

假如我們用 ξ' 和 η' 的表示式来代替公式 (54) 中的 ξ' 和 η' 并且应用条件 (53)，那么我們就可看出，利用 (51) 就可把变数 (x', y', z') 表示成 (x, y, z) 的綫性齐次多項式。由于 (53)，表示式 (51) 和 (54) 的分母是相同的，并且变数 (x, y, z) 所受到的綫性变換和表示式

$$u=\bar{\xi}\eta+\xi\bar{\eta};\ \ v=\frac{1}{i}(\bar{\xi}\eta-\xi\bar{\eta});\ \ w=\xi\bar{\xi}-\eta\bar{\eta} \qquad (56)$$

在 U 变换 (52) 之下所受到的綫性变换一样。下面我們将建立这个綫性变换的确切形式。

首先来建立行列式为 1 的 U 变换 (52) 的一般形式。U 变换的一般条件給我們[28]：

$$a\bar{c}+b\bar{d}=0;\ c\bar{c}+d\bar{d}=1。$$

以 $\bar{c}$ 乘条件(55)并利用上述条件中的第一个，就得到：

$$-bd\bar{d}-bc\bar{c}=\bar{c},$$

因此由于第二个条件就有 $\bar{c}=-b$ 或 $c=-\bar{b}$，并且完全相似的可以証明：$d=\bar{a}$。因此我們可以将所有行列式为 1 的 U 变换写成：

$$\left.\begin{aligned}\xi'&=a\xi+b\eta,\\ \eta'&=-\bar{b}\xi+\bar{a}\eta,\end{aligned}\right\}\tag{57}$$

其中 a 和 b 是任意的复数，满足条件：

$$a\bar{a}+b\bar{b}=1。\tag{58}$$

現在将(56)式用新变数表示出来：

$$u'+iv'=2\bar{\xi}'\eta';\ u'-iv'=2\xi'\bar{\eta}';\ w'=\xi'\bar{\xi}'-\eta'\bar{\eta}',$$

或者，利用(57)：

$$\begin{aligned}u'+iv'&=\bar{a}^2 2\bar{\xi}\eta-\bar{b}^2 2\xi\bar{\eta}-2\bar{a}\bar{b}(\xi\bar{\xi}-\eta\bar{\eta})\\ u'-iv'&=-b^2 2\bar{\xi}\eta+a^2 2\xi\bar{\eta}-2ab(\xi\bar{\xi}-\eta\bar{\eta})\\ w'&=\bar{a}b2\bar{\xi}\eta+a\bar{b}2\xi\bar{\eta}+(a\bar{a}-b\bar{b})(\xi\bar{\xi}-\eta\bar{\eta})。\end{aligned}$$

作替换　$2\bar{\xi}\eta=u+iv;\ 2\xi\bar{\eta}=u-iv;\ \bar{\xi}\xi-\eta\bar{\eta}=w$。

并将前两个等式相加和相减，就得到以 (u, v, w) 表 (u', v', w') 的表示式，亦即以 (x, y, z) 表 (x', y', z') 的表示式：

$$\left.\begin{aligned}x'&=\frac{1}{2}(a^2+\bar{a}^2-b^2-\bar{b}^2)x+\frac{i}{2}(\bar{a}^2+\bar{b}^2-a^2-b^2)y-(ab+\bar{a}\bar{b})z,\\ y'&=\frac{i}{2}(a^2+\bar{b}^2-\bar{a}^2-b^2)x+\frac{1}{2}(x^2+\bar{a}^2+b^2+\bar{b}^2)y+i(\bar{a}\bar{b}-ab)z,\\ z'&=(a\bar{b}+\bar{a}b)x+i(a\bar{b}-\bar{a}b)y+(a\bar{a}-b\bar{b})z。\end{aligned}\right\}\tag{59}$$

每一个 U 变换(57)对应于 XY 面的某一个变换，而这个变换又由于测地投影所建立的对应关系，而給出某一个球面变换。

因此(59)是一个实变换，它将方程

$$x'^2+y'^2+z'^2=1$$

变为方程
$$x^2+y^2+z^2=1。$$

但是齐次綫性变换 (59) 不改变常数項 1，因此方程的左边也必須保持不变，卽

$$x'^2+y'^2+z'^2=x^2+y^2+z^2。$$

所有这些均可从变换 (59) 本身的形式直接得出。于是，公式(59)給出一个三个变数的实正交变换。現在来指明变换(59)的行列式永远等于 $(+1)$。 这个行列式是复变数 a 和 b 的实数和虛数部分的連續函数，而 a 和 b 满足关系式 (58)。但是行列式的值只能以是 $(+1)$ 或 (-1)，于是根据所說的連續性，它必須永远等于 $(+1)$ 或永远等于 (-1)。但是当 $a=1$, $b=1$ 时公式 (59) 給我們以行列式为 $(+1)$ 的恒等变换，这就是說，变换(59)的行列式确实永远等于 $(+1)$。因此，綫性变换 (59) 就表示空間圍繞原点的轉动。

現在来証明，空間的每一个轉动都可写成形式 (59)。如果我們假設

$$a=e^{-\frac{i}{2}\varphi};\ \bar{a}=e^{\frac{i}{2}\varphi};\ b=\bar{b}=0,$$

这就是說，取 U 变换的矩陣为

$$A_\varphi=\left\|\begin{matrix} e^{-\frac{i}{2}\varphi}, & 0 \\ 0, & e^{\frac{i}{2}\varphi}\end{matrix}\right\|, \tag{60}$$

那么，公式(59)給出：

$$\left.\begin{aligned} x'&=x\cos\varphi-y\sin\varphi,\\ y'&=x\sin\varphi+y\cos\varphi,\\ z'&=z,\end{aligned}\right\} \tag{61}$$

即，我們得到一个以角度 φ 圍繞 Z 軸的轉动。

假如現在我們取：

$$a=\bar{a}=\cos\frac{\psi}{2};\ b=-i\sin\frac{\psi}{2};\ \bar{b}=i\sin\frac{\psi}{2},$$

即我們用下述形式来决定 U 变换的矩陣：

$$B_{\psi}=\begin{Vmatrix}\cos\frac{\psi}{2} & -i\sin\frac{\psi}{2}\\ -i\sin\frac{\psi}{2}, & \cos\frac{\psi}{2}\end{Vmatrix}, \tag{62}$$

那么，公式(59)就給出：

$$\left.\begin{aligned}x'&=x,\\ y'&=y\cos\psi-z\sin\psi,\\ z'&=y\sin\psi+z\cos\psi。\end{aligned}\right\} \tag{63}$$

这是一个以角度 ψ 圍繞 X 軸的轉动。

但是，我們从 [20] 知道，每一个尤拉角为 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ 的轉动都是下述三个轉动的結果：先以 α 角圍繞 Z 軸轉动，然后以 β 角圍繞新的 X 軸而轉动，再以 γ 角圍繞新的 Z 軸而轉动。

用 Z_{φ} 表示对应于变换(61)的三阶矩陣，用 X_{ψ} 表示变换(63)的矩陣。以 α 角圍繞 Z 軸的轉动由矩陣 Z_{α} 实現。于是，原来的 X 軸按这一个矩陣变为新的 X 軸，不难看出，以 β 角圍繞新的 X 軸的轉动的矩陣为 $Z_{\alpha}X_{\beta}Z_{\alpha}^{-1}$，于是头两个轉动的矩陣为

$$Z_{\alpha}X_{\beta}Z_{\alpha}^{-1}Z_{\alpha}=Z_{\alpha}X_{\beta}。$$

就如上面一样，以 γ 角圍繞新的 Z 軸的轉动的矩陣为

$$(Z_{\alpha}X_{\beta})Z_{\gamma}(Z_{\alpha}X_{\beta})^{-1},$$

从而最終的旋轉$\{\alpha, \beta, \gamma\}$的矩陣为

$$(Z_{\alpha}X_{\beta})Z_{\gamma}(Z_{\alpha}X_{\beta})^{-1}(Z_{\alpha}X_{\beta})$$

或

$$Z_{\alpha}X_{\beta}Z_{\gamma}。 \tag{64}$$

在上面的討論中，我們应用了这样一个显然的事实，即：若 Z_φ 是以 φ 角圍繞某一个通过原点的軸 l 的轉动的矩陣，而矩陣 M 将 l 变为軸 l_1，那么以 φ 角圍繞軸 l_1 的轉动将被相似矩陣

$$MZ_\varphi M^{-1}$$

所决定。

現在来指出：假如 A_1 和 A_2 是两个 U 变换 (57)，它們分別对应于正交变换 (59) U_1 和 U_2，那么，显然，乘积 A_2A_1 也将对应于乘积 U_2U_1。因此，由于 (64)，空間的轉动 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ 可以由以下的 U 矩陣得出，这是三个 U 矩陣的乘积：

$$\begin{Vmatrix} e^{-i\frac{\alpha}{2}}, & 0 \\ 0, & e^{i\frac{\alpha}{2}} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \cos\frac{\beta}{2}, & -i\sin\frac{\beta}{2} \\ -i\sin\frac{\beta}{2}, & \cos\frac{\beta}{2} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} e^{-i\frac{\gamma}{2}}, & 0 \\ 0, & e^{i\frac{\gamma}{2}} \end{Vmatrix}。 \tag{65}$$

这样，每一个 U 变換对应于一个确定的三維空間的轉动，并且所有的轉动都可以这样得到。两个 U 变换的乘积对应于对应轉动的乘积。我們可以說，公式 (59) 决定了行列式为 1 的 U 变換群和三維空間的轉动群間的一个准同构。

現在来看看对应于恒等变換即轉动群的单位元素的那些 U 变換。在这个情形下，公式 (59) 的第三式給我們

$$a\bar{b}=0;\ a\bar{a}-b\bar{b}=1,$$

因此 $|a|=1$ 和 $b=0$。令 $a=e^{i\vartheta}$。公式 (59) 中的第一式給出：

$$\frac{1}{2}(e^{i2\vartheta}+e^{-i2\vartheta})=1。$$

由此可直接推出 $\vartheta=0$ 或 π，这就是說 $a=\pm 1$。

因此我們得到矩陣为

$$E=\begin{Vmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{Vmatrix};\quad S=\begin{Vmatrix} -1, & 0 \\ 0, & -1 \end{Vmatrix}=-E$$

的两个 U 变換，它們对应于轉动群的单位元素。

現在假設两个 U 矩陣 U 和 V 給出同一个轉动。在这个情形下，$V^{-1}U$ 将給出空間的轉动群的恒等变換，卽 $V^{-1}U=E$ 或 $(-E)$，卽 $U=V$ 或 $U=-V$。这里我們应注意，矩陣前面的負号說明矩陣的每一个元素都必須改变符号。上面的討論說明：几个 U 变換(57)仅当它們只相差一个符号时給出同一个空間轉动。反之，如果它們只相差符号，那么，就如我們在上面所提起并从公式(59)所推出，它們給出同一个空間轉动。最后我們可以說：空間的轉动群准同构于行列式为1的 U 变換(57)，而且，当且仅当两个矩陣只相差一个符号时，才可得到相同的轉动。

矩陣 E 和 $-E$ 組成群 G——行列式为1的 U 变換(57)的群——的正規子群 H。这个正規子群 H 的每一个共軛集合都由两个元素 G_1 和 $(-G_1)$ 所組成，此处 G_1 是群的任意一个元素。从上面所說的可直接推出：轉动群与群 H 的商群同构。

公式(59)包含两个复参数 a 和 b，它們必須滿足关系式(58)。每一个复参数包含两个实参数

$$a=a_1+ia_2;\quad b=b_1+ib_2,$$

因此(58)与下式等价：

$$a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2=1。$$

因此公式(59)包含四个实参数，它們必須滿足一个关系，卽，公式(59)包含三个独立的实参数，就象轉动群一样。参数 a 和 b 一般地叫做凱萊-克兰参数。不难得到它們以尤拉角所表示的表示式。事实上，将(65)中三个矩陣相乘，我們就得到我們在上面所看到的那个 U 矩陣，它对应于尤拉角为 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ 的轉动。作乘法，我們就得到对应参数 a 和 b 的表示式：

$$a=e^{-i\frac{\alpha+\gamma}{2}}\cos\frac{\beta}{2};\quad b=-ie^{i\frac{\gamma-\alpha}{2}}\sin\frac{\beta}{2}。\qquad(66)$$

假如将 2π 加到 α 或 γ 上，那么 a 和 b 改变符号，而轉动还仍

是同一个。这个事实我們在上面已經說过了。

64. 一般綫性群和劳倫次群 我們只建立了两个变数的 U 群和三維空間轉动群之間的密切关系。用完全类似的方法我們可以建立两个变数的行列式等于 1 的一般綫性群和劳倫次群間的关系。

引进四个变数

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_0,$$

并且应用表示測地投影的公式(51),在其中我們假設

$$x=\frac{x_1}{x_0};\quad y=\frac{x_2}{x_0};\quad z=\frac{x_3}{x_0}。\tag{67}$$

这个給我們下述公式:

$$\frac{x_1}{x_0}=\frac{\bar{\xi}\eta+\xi\bar{\eta}}{\xi\bar{\xi}+\eta\bar{\eta}};\quad \frac{x_2}{x_0}=\frac{1}{i}\,\frac{\bar{\xi}\eta-\xi\bar{\eta}}{\xi\bar{\xi}+\eta\bar{\eta}};\quad \frac{x_3}{x_0}=\frac{\xi\bar{\xi}-\eta\bar{\eta}}{\xi\bar{\xi}+\eta\bar{\eta}}。$$

这些公式除了相差一个公因子外,完全地决定了 x_k,并且我們可以假設

$$\left.\begin{aligned} &x_0=\xi\bar{\xi}+\eta\bar{\eta}; && x_1=\bar{\xi}\eta+\xi\bar{\eta};\\ &x_2=\frac{1}{i}(\bar{\xi}\eta-\xi\bar{\eta}); && x_3=\xi\bar{\xi}-\eta\bar{\eta}。\end{aligned}\right\}\tag{68}$$

原来的变数满足关系式(51_1),因此,由于(67),由公式(68)所决定的新变数,对于任意的复数值 ξ 和 η 都满足下式:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_0^2=0。\tag{69}$$

在 ξ 和 η 的 U 变换之下,表示式 $(\xi\bar{\xi}+\eta\bar{\eta})$ 保持不变,这就是說,根据(68),現在用来表示时間的变数 x_0 保持不变,并且我們因此而得到三維空間的轉动。現在我們放下 U 变换而来討論一般的綫性变换群:

$$\left.\begin{aligned}\xi'&=a\xi+b\eta,\\ \eta'&=c\xi+d\eta。\end{aligned}\right\}\tag{70}$$

以下我們将要按照以前討論 U 变换时的方式来进行討論。作

表示式

$$\left.\begin{aligned} x_1+ix_2=2\bar{\xi}\eta;\ \ x_1-ix_2=2\xi\bar{\eta};\\ x_0+\ x_3=2\xi\bar{\xi};\ \ x_0-\ x_3=2\eta\bar{\eta}。\end{aligned}\right\} \tag{71}$$

对于新的变数 ξ', η', 我們得到新的 x'_k:

$$x'_1+ix'_2=2\bar{\xi}'\eta';\ \ x'_1-ix'_2=2\xi'\bar{\eta}';$$

$$x'_0+\ x'_3=2\xi'\bar{\xi}';\ \ x'_0-\ x'_3=2\eta'\bar{\eta}'。$$

将(70)代入上面四式并应用(71),就得到:

$$\left.\begin{aligned} x'_1+ix'_2=\bar{a}d(x_1+ix_2)+\bar{b}c(x_1-ix_2)+\bar{a}c(x_0+x_3)+\bar{b}d(x_0-x_3),\\ x'_1-ix'_2=b\bar{c}(x_1+ix_2)+a\bar{d}(x_1-ix_2)+a\bar{c}(x_0+x_3)+b\bar{d}(x_0-x_3),\\ x'_0+\ x'_3=\bar{a}b(x_1+ix_2)+a\bar{b}(x_1-ix_2)+a\bar{a}(x_0+x_3)+b\bar{b}(x_0-x_3),\\ x'_0-\ x'_3=\bar{c}d(x_1+ix_2)+c\bar{d}(x_1-ix_2)+c\bar{c}(x_0+x_3)+d\bar{d}(x_0-x_3),\end{aligned}\right\} \tag{72}$$

由此可直接得到用 x_k 表示 x'_k 的实系数綫性表示式，这些式子我們不再写出来了。我們仅仅注意：假如将等式(72)中的最末两个相加，那么，在 x'_0 的表示式中 x_0 的系数是

$$\frac{1}{2}(a\bar{a}+b\bar{b}+c\bar{c}+d\bar{d}),$$

这就是說，这个系数是正的。

新的变数 x'_k 和原来的变数一样，也滿足等式：

$$x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2-x_0'^2=0。 \tag{73}$$

假如在这等式的左边用以 x_k 表示的 x'_k 的表示来代替 x_k，那么，必須得到等式(69)。但是在这个条件下，等式(73)的左边可以和等式(69)的左边相差一个常数因子，这就是說，在这个情形下，我們有

$$x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2-x_0'^2=k(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_0^2),$$

这里 k 是某一个常数。

利用上面的一些公式，并且注意到

$$x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2-x_0'^2=(x_1'+ix_2')(x_1'-ix_2')-(x_0'+x_3')(x_0'-x_3'),$$

就不难得出：$k=(ad-bc)(\overline{a}\overline{d}-\overline{b}\overline{c})=|ad-bc|^2$。如果我們想得到 $k=1$，也就是，如果我們想得到劳倫次变换：

$$x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2-x_0'^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_0^2, \tag{74}$$

那么我們就必須取綫性变换(70)，并使它的行列式的模等于1，也就是說，行列式可表成 $e^{i\varphi}$。和以前一样，以 $e^{-\frac{i\varphi}{2}}$ 乘变换 (70) 的所有的系数，那么一方面，在公式 (68) 中以 ξ' 和 η' 代替 ξ 和 η 时，由这个公式所决定的量 x_1', x_2', x_3' 不改变，因为这个公式只包含量 (ξ', η') 中的一个和量 $(\overline{\xi}', \overline{\eta}')$ 中的一个的乘积，而另一方面，我們把变换的行列式化成了1。

因此，我們可认为变换(70)的行列式是1：

$$ad-bc=1。\tag{75}$$

和前面一节中一样，我們可以指明，以 x_k 表示 x_k' 的綫性变换的行列式是(+1)。此外，我們再提一下：在这个变换中，x_0' 的表示式中 x_0 的系数是正的，这就是說，这个变换的行列式是(+1)并且不变讀时間的方向：即变换(72)是一个正劳倫次变换。

因此，結論是，在条件(75)之下，变换是我們在[**54**]中所定义的正劳倫次变换。

和在上节中一样，我們現在提出这样一个問題：是否任意一个正劳倫次变换都可由公式(72)得到。首先注意，和前节中一样，两个綫性变换 (70) 的乘积对应于相当的劳倫次变换的乘积，换句話說：如果 A 和 B 是两个綫性变换(70)，由于(72)，它們产生两个劳倫次变换 T_1 和 T_2，那么綫性变换 BA 将对应于劳倫次变换 T_2T_1。在[**54**]中我們看到，每一个正劳倫次变换都可写成：

$$T=VSU,$$

这里 U 和 V 就是三維空間的轉动，而 S 是两个变数的劳倫次变换，由于上节的結果，我們可以借助于某一个形式为(70)，行列式

是由 1 的 U 变换而得到任一个轉动。因此，我們只需証明，在适当选擇的綫性变换(70)之下，根据公式(72)，我們可以得到任一个含有两个变数的正劳倫次变换。比較(74)和[54]中的(21)，我們看出，我們現在将认为 $c=1$，这样一来，[54]中給出两个变数的正劳倫次变换的公式(17)就可写成：

$$\left.\begin{aligned} x_3' &= \frac{-vx_0+x_3}{\sqrt{1-v^2}}; \quad x_0' = \frac{x_0-vx_3}{\sqrt{1-v^2}}; \\ x_1' &= x_1; \qquad\qquad x_2' = x_2。\end{aligned}\right\} \tag{76}$$

引进量
$$u=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}>1$$
并考虑一个特殊形式的綫性变换(70)

$$\xi'=l\xi; \quad \eta'=\frac{1}{l}\eta,$$

其中 l 是一个实常数。显然它的行列式等于 1。在这个情形下，$a=l$，$d=\frac{1}{l}$ 而 $b=c=0$。将它代入公式(72)，我們正好得到变换(76)，只要 l 滿足：

$$\frac{l^2}{2}+\frac{1}{2l^2}=u; \quad \frac{l^2}{2}-\frac{1}{2l^2}=-vu。$$

这直接給我們以 $l^2=u\pm\sqrt{u^2-1}$；第二个条件指出，当 $v>0$ 时，必須取 l^2 的根小于 1，而当 $v<0$ 时，必須取 l^2 的根大于 1，而且在这个条件下，第二个条件可以滿足。将 l^2 开方，我們得到相差一个符号的 l 的两个值。因此我們可以总結地断言：行列式为 1 的綫性变换(70)的群准同构于正劳倫次群，而且这个准同构被公式(72)所实現。和在前节中一样。这个准同构不是同构，即，不同的变换(70)可以产生同一个劳倫次变换。从公式(72)直接推出：劳倫次群的单位变换由矩陣为

$$E=\left\|\begin{matrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{matrix}\right\|; \quad S=\left\|\begin{matrix}-1, & 0\\ 0, & -1\end{matrix}\right\|=-E$$

的两个綫性变换得到，因此完全和上节一样，可以指出：劳倫次群中的每一个变换都能从两个且只有两个綫性变换(70)得到，这两个变换的系数只相差一个符号。

完全和[63]中一样，在行列式为1的綫性变换群中元素 E 和 $(-E)$ 組成一个正規子群 H，并且正劳倫次群和 H 的商群同构。

綫性变换(70)包含四个复系数，它們被条件(75)联系着。因此公式(72)包含三个任意的复参数，或者換句話說，包含六个任意的实参数。

65. 群的綫性变换表示 設 G 是某一个群，它的元素是 G_α，又設每一个元素 G_α 对应于确定的矩陣 A_α，而且所有矩陣 A_α 都有相同的阶而且它們的行列式不等于零。再假設这个对应是这样的：每一个乘积 $G_{\alpha_2}G_{\alpha_1}$ 对应于矩陣 $A_{\alpha_2}A_{\alpha_1}$ 这是 A_{α_2} 和 A_{α_1} 的乘积。在这个情形，我們就說：矩陣 A_α 或者对应于它們的綫性变换給出了群 G 的一个綫性表示。令 G_0 是群的单位元素而 A_0 是对应的矩陣。因为 $G_0G_\alpha=G_\alpha$，我們必須有 $A_0A_\alpha=A_\alpha$，由此，以 A_α^{-1} 右乘，就得到 $A_0=I$，这就是說，单位元素必須对应于单位矩陣。令 G_{α_1} 和 G_{α_2} 是一对互逆元素而 A_{α_1} 和 A_{α_2} 是对应的矩陣。由等式 $G_{\alpha_2}G_{\alpha_1}=G_0$ 推出 $A_{\alpha_2}A_{\alpha_1}=I$，这就是說，互逆元素对应于互逆矩陣。从上面可直接推出：矩陣 A_α（或者对应的綫性变换）組成一个群 A，与群 G 准同构。如果不同的元素对应于不同的矩陣，那么 A 不只是准同构于 G，而且是同构于 G。在这个情形下我們就說：它給出群 G 的一个单值的綫性表示。

假如不这样，那么对应于群 A 的单位矩陣的那些元素組成群 G 的一个正規子群，而群 A 与这个正規子群的商群同构[57]。

如果群 G 本身就是一个綫性变换，那么显然，它本身就是它所有可能的綫性表示中的一个。

現在提出对于綫性表示的定义的一点注意。假設我們已經知

道每一个元素 G_α 对应于确定的矩陣 A_α，而且元素的乘积对应于矩陣的乘积，但是不知道矩陣 A_α 的行列式是否异于零。我們来指明，如果一个行列式 $D(A_{\alpha_0})$ 等于零，那么所有的 $D(A_\alpha)$ 都等于零。事实上，矩陣 $A_{\alpha_0}A_\alpha$ 在 α 改变的时候包含了对应于群中元素的所有矩陣[56]。但是 $D(A_{\alpha_0}A_\alpha)=D(A_{\alpha_0})D(A_\alpha)$，且乘积等于零，因为由所設条件，第一个因子等于零。因此，由于乘积对应于乘积的对应規則，我們只需驗明行列式 $D(A_\alpha)$ 中有一个异于零；例如，只須指出 G 的单位元素对应于 A 中的单位矩陣就行了。

設 X 是某一个与矩陣 A_α 同阶的矩陣，它的行列式不等于零。我們有：

$$(XA_{\alpha_2}X^{-1})(XA_{\alpha_1}X^{-1})=XA_{\alpha_2}A_{\alpha_1}X^{-1},$$

因此，矩陣 $XA_\alpha X^{-1}$ 也給出群 G 的一个綫性表示。这样的两个相似的表示一般地被称做是等价表示。假設矩陣 A_α 的阶是 n，$(x_1, \cdots, x_n)$ 是 n-維空間矢量的分量，对于这些矢量作变换 A_α，这样，群 A 就是

$$\boldsymbol{x}'=A_\alpha\boldsymbol{x}。\tag{77}$$

我們在[25]知道，等价綫性表示

$$\boldsymbol{y}'=XA_\alpha X^{-1}\boldsymbol{y},\tag{78}$$

有如下的意义：在上述空間中，引进新的軸，而且新的分量按照公式

$$(y_1, \cdots, y_n)=X(x_1, \cdots, x_n)。\tag{79}$$

对于这些新的軸，綫性变换按照公式(78)来表示，这就是說，等价綫性表示可由坐标軸按照公式(79)的简单替代而得到。在公式(77)中出現的变数$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$称做綫性表示的对象。因此，轉到等价綫性表示就等于在某一个行列式异于零的綫性变换下将綫性表示的对象替換成另一个。

設有群 G 的綫性表示对应于 n 阶矩陣 A_α，又有同一个群的

綫性表示对应于 m 阶矩陣 B_α。組成 $(n+m)$ 阶准对角矩陣:

$$[A_\alpha,\ B_\alpha]=\begin{Vmatrix}A_\alpha, & 0\\ 0, & B_\alpha\end{Vmatrix}。\tag{80}$$

根据准对角矩陣相乘的法则，我們有:

$$[A_{\alpha_2},\ B_{\alpha_2}]\cdot[A_{\alpha_1},\ B_{\alpha_1}]=[A_{\alpha_2}A_{\alpha_1},\ B_{\alpha_2}B_{\alpha_1}]。$$

因此，矩陣(80)也給出群 G 的一个綫性表示。一般說来，如果矩陣 A_α, B_α, C_α 是群 G 的某几个綫性表示，那么应用准对角矩陣

$$D_\alpha=[A_\alpha,\ B_\alpha,\ C_\alpha]=\begin{Vmatrix}A_\alpha, & 0, & 0\\ 0, & B_\alpha, & 0\\ 0, & 0, & C_\alpha\end{Vmatrix}。\tag{81}$$

我們可以組成一个新的表示。

現在注意，假如我們按照矩陣 $XD_\alpha X^{-1}$ 轉到等价表示，那么，一般来說，矩陣的准对角形的特征消失了，并且从外表上已經不能立刻看出来这个新的表示是按照規則(81)由另外几个較低維的表示所組成的表示的一个等价表示。假如我們的綫性表示 D_α 就有准对角形(80)，那么它分解为两个較低維的綫性表示 A_α 和 B_α，即 A_α 和 B_α 为較低阶的矩陣。在这种情形，綫性表示称做是已約的。假如某一个綫性表示 E_α 沒有准对角形式，而它的某一个等价表示 $XE_\alpha X^{-1}$ 有这种形式，那么表示 E_α 就称做是可約的。最后，如果表示本身和它的一切等价表示都沒有准对角形式，即，它們都不是可約的，那么这样的表示就被称做不可約表示。

現在来指出在什么条件下我們可断言表示是已約的。設綫性表示由 n 阶矩陣 A_α 所組成，这些矩陣給出变数 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 的綫性变换。假設所有的矩陣 A_α 都是 U 矩陣，并設由前 k 个基础矢量所組成的子空間 R' 在变换 A_α 之下变为它自己，即：如果 $x_{k+1}=$ $=x_{k+2}=\cdots=x_n=0$，那么就有 $x'_{k+1}=x'_{k+2}=\cdots=x'_n=0$。換句話說，所有的矩陣 A_α 都有下列形式:

$$\begin{Vmatrix} A'_\alpha, & N_\alpha \\ 0, & A''_\alpha \end{Vmatrix}, \tag{82}$$

其中 A'_α 是某一个 k 阶矩陣，A''_α 是某一个 $(n-k)$ 阶矩陣，而在左下角，有 $(n-k)$ 行和 k 列都是零。考虑由最后 $(n-k)$ 个基础矢量所組成的空間 R''。它由垂直于上述子空間 R' 的全体矢量的矢量所組成。因为每一个变換 A_α 都将子空間 R' 变为它自己，又因为 U 变換保持矢量垂直的性质因此子空間 R'' 中的每一个矢量，在变換 A_α 之下，仍变为这个子空間中的矢量。換句話說，如果 $x_1=$ $=\cdots=x_k=0$，就有 $x'_1=\cdots=x'_k=0$。由此可直接推出，矩陣 (82) 中，位于右上角的 k 行 $(n-k)$ 列元素都等于零，卽，我們所討論的綫性变換的矩陣是

$$\begin{Vmatrix} A'_\alpha, & 0 \\ 0, & A''_\alpha \end{Vmatrix} = [A'_\alpha,\ A''_\alpha],$$

因此，变換是已約的。現在假設，所有 U 变換 A_α 都保持同一个子空間 R_1 不变，R_1 的維数是 $k\,(k<n)$，此处 n 是矩陣 A_α 的阶。我們变換坐标軸，使得子空間 R_1 由前 k 个基础矢量所生成，这个相当于利用 U 变換将表示变为等价綫性表示。如上所示，这样变換后所得的表示是已約的。因此我們有下述定理。

定理　如果群的一个綫性表示由 U 矩陣所組成，并且这些 U 矩陣将某一个子空間保持不变，那么这样的表示是可約表示。

关于表示是否可約的問題与将矩陣 A_α 化为相似矩陣 $XA_\alpha X^{-1}$ 的問題紧密地联系着。現在提出化为等价表示的几个个別情形，这是在矩陣 X 的特殊选擇下得到的。作矩陣 X，它的第一行中，第二个元素是单位元素，而其他的元素都是零，第二行中，第一个元素是单位元素，而其他的元素都是零，从第三行开始，主对角綫上的元素是单位元素，而其他的元素都是零，卽，

$$X=\begin{Vmatrix}0, & 1, & 0, & 0, & \cdots, & 0\\ 1, & 0, & 0, & 0, & \cdots, & 0\\ 0, & 0, & 1, & 0, & \cdots, & 0\\ 0, & 0, & 0, & 1, & \cdots, & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0, & 0, & 0, & 0, & \cdots, & 1\end{Vmatrix}。$$

从最后一行开始直接展开，可看出 $D(X)=-1$。应用矩陣乘法的一般規則，不难驗明，如果 Y 是某一个矩陣，那么相似矩陣 XYX^{-1} 可从将 Y 的第一、二行对换，然后，将 Y 的第一、二列对换而得到。同样的方法可知矩陣行的对换及同时发生的对应列的对换等于将矩陣变为某一个相似矩陣，这个相似矩陣由一个与 Y 无关的变换 X 的帮助而得到。因此，如果我們对于給出群的某一个綫性表示都施以同一个行和列的对换，那么就得到一个等价表示。

如果可以将整数 1, 2, …, n 分成这样的两类，使得在每一个矩陣 A_α 中，行数在一个类中的任一行和列数在另一类中的任一列的交叉处都是零，那么这样的表示是可約的。事实上，为了証明它的可約性，即，为了将它化为已約的，只需作这样的行和列的对换：使得同一类的行和列在左上角，另一类的行和列在右下角。

在这一节的最后，我們再提出一种情形：群 G 的綫性表示是一阶的，即，所有矩陣 A_α 都是一阶矩陣，也就是通常的数。在这个情形，我們群的每一个元素 G_α 都对应于一个变换 $x'=m_\alpha x$，或者，一般来說，对应于一个数 m_α，而乘积 G_2G_1 对应于通常数的乘积 m_2m_1。

66. 基本定理 設有一个由 m 个元素 $G_1, \cdots, G_m$ 所組成的有限群 G，又設 $A_1, \cdots, A_m$ 是給出这个群的一个綫性表示的 n 阶矩陣。用 $x\ (x_1, \cdots, x_n)$ 来表示这个表示的对象。考慮表示式：

$$\varphi(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{s=1}^{m} |A_s \boldsymbol{x}|^2。 \tag{83}$$

完全写出来，就是表示式：

$$\varphi = \sum_{s=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} (a_{i1}^{(s)} x_1 + \cdots + a_{in}^{(s)} x_n)(\bar{a}_{i1}^{(s)} \bar{x}_1 + \cdots + \bar{a}_{in}^{(s)} \bar{x}_n), \tag{84}$$

这里我們用 $a_{ik}^{(s)}$ 表示矩陣 A_s 的元素。不难驗明表示式(84)是一个厄密特型，卽，在这个表示式中 $\bar{x}_p x_q$ 和 $x_p \bar{x}_q$ 的系数是共軛复数。此外，由公式(83)可推出这个厄密特型本身是某一些矢量的长度的平方和，这就是說，这是一个正定厄密特型[40]。換句話說，施行某一个 U 变換

$$\boldsymbol{y} = U\boldsymbol{x},$$

将这个型化成平方和

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \bar{y}_j y_j$$

之后，所有的系数 λ_j 都是正的。再对新的变数作变換 $z_j = \sqrt{\lambda_j}\, y_j$，就可将这个厄密特型 φ 写成簡单的平方和：

$$\varphi = \bar{z}_1 z_1 + \cdots + \bar{z}_n z_n。 \tag{85}$$

对变数 $(x_1, \cdots, x_n)$ 作某一个属于我們的群的綫性表示的变換，

$$\boldsymbol{x}' = A_k \boldsymbol{x}, \tag{86}$$

不难看出，在这个变換之下这个厄密特型不改变。事实上：

$$\varphi(x_1', \cdots, x_n') = \sum_{s=1}^{m}{}' |A_s A_k \boldsymbol{x}|^2,$$

但是，在[56]我們知道，变換(矩陣)

$$A_1 A_k,\ A_2 A_k,\ \cdots,\ A_m A_k$$

的全体和矩陣　$A_1, A_2, \cdots, A_m$

的全体重合；因此，假如我們将变換(86)用新的变数 $(z_1, \cdots, z_n)$ 来表示，这些变数和原来的变数由公式

$$(z_1, \cdots, z_n) = B_0(x_1, \cdots, x_n)$$

联系着，其中 B_0 是某一个矩陣，那么替代 A_k 我們得到相似的群 $B_0A_kB_0^{-1}$，并且这个相似群的变換的全体都不改变表示式(85)，卽不改变模的平方和，亦卽都是 U 变換。因此，对于有限群的情形，我們已經指出，每一个綫性表示都等价于某一个 U 表示，卽由 U 变換組成的表示。在某一些补充条件之下，这个性质对于由参数决定的无限群仍保留，并且在以后，当我們說到群的綫性表示的时候，我們将永远指 U 表示。因此我們有下述定理。

定理 I. 群(有限的)的每一个綫性表示都有等价的 U 表示。

現在来引进綫性表示的可約的必要和充分条件。首先介紹一个新的术語，我們把对角綫上包含相同元素的对角矩陣 $[k, \cdots, k]$ 叫做数量矩陣。这样的矩陣可以用 kI 来表示。就象上面我們所看到的，对于代数运算，它和数 k 等价。

現在假設，我們有某一个群的可約綫性表示。例如，这样的表示由下述形式的矩陣来实現：

$$D_\alpha = X[A_\alpha,\ B_\alpha,\ C_\alpha]X^{-1},$$

其中 X 是某一个矩陣而中間是一个准对角矩陣。作矩陣

$$Y = X[kI,\ lI,\ mI]X^{-1},$$

这里中間的准对角矩陣和矩陣 D_α 中間的有同样的結构。不难看出，矩陣 Y 和所有的矩陣 D_α 都是可交換的。实际上：

$$D_\alpha Y = X[A_\alpha k,\ B_\alpha l,\ C_\alpha m]X^{-1},$$

并且同样地有

$$YD_\alpha = X[kA_\alpha,\ lB_\alpha,\ mC_\alpha]X^{-1}。$$

但是一个矩陣和一个数相乘时它們的次序不起作用。此外，假如我們假設数 k, l, m 是不同的，那么矩陣 Y 不是单位矩陣的倍数。实际上，它显然有不同的特征数 k, l 和 m。因此我們有下述定理。

定理 II. 假如綫性表示是可約的，那么就存在一个矩陣，这

个矩陣不是数量矩陣，并且和所有生成这个可約綫性表示的矩陣是可交换的。

現在来指明逆定理也成立，卽

定理 III. 假如存在一个矩陣 Y，不是数量矩陣并且和綫性表示的矩陣 D_a 都是可交换的，那么这样的綫性表示是可約的。

这样，根据定理的条件，对于任意的指标 a，我們都有：

$$D_a Y = Y D_a。\tag{87}$$

設 Z 是这样的一个矩陣，它的行列式异于零，并且所有的矩陣 ZD_aZ^{-1} 都是 U 矩陣：$ZD_aZ^{-1}=U_a$。将上面的等式写成：

$$Z^{-1}U_aZY = YZ^{-1}U_aZ。$$

从左边乘上 Z，从右边乘上 Z^{-1}，卽得：

$$U_a(ZYZ^{-1}) = (ZYZ^{-1})U_a,$$

这就是說，矩陣 ZYZ^{-1} 和 U 表示的矩陣的全体是可交换的。这个矩陣显然不能是单位矩陣的倍数，因为如果 $ZYZ^{-1}=kI$，就有 $Y=kI$。我們只要証明等价的綫性表示 U_a 是可約的就好了。因此我們定理的証明变成綫性表示是 U 表示的这种情形。我們就簡单地认为由矩陣 D_a 組成的綫性表示本身就是一个 U 表示。

設 λ_1 是矩陣 Y 的某一个特征值。由 [25] 我們知道，矩陣 $\lambda_1=\lambda_1 I$ 和任何矩陣可交换，因此，矩陣 $Y-\lambda_1 I$ 和 Y 都滿足条件 (87)，就是說和矩陣 D_a 都可交换。不难看出，矩陣 $Y_1=Y-\lambda_1 I$ 的特征值中，至少有一个等于零。事实上，矩陣 Y_1 的特征方程是：

$$D(Y_1-\lambda I) = D[Y-(\lambda+\lambda_1)I] = 0,$$

这就是說，它由 Y 的特征方程以 $(\lambda+\lambda_1)$ 代替 λ 而得到，而因为矩陣 Y 的特征值中有等于 λ_1 的，因此 Y_1 的特征值中至少有一个等于零。因此，矩陣 Y_1 的行列式等于它的特征值的乘积，也将等于零。因此当我們証明定理的时候，可假設 D_a 是 U 矩陣，并且公式 (87) 中的矩陣 Y 的行列式等于零。

考虑分量为

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y_{11}u_1 + y_{12}u_2 + \cdots + y_{1n}u_n \\ x_2 &= y_{21}u_1 + y_{22}u_2 + \cdots + y_{2n}u_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= y_{n1}u_1 + y_{n2}u_2 + \cdots + y_{nn}u_n \end{aligned}\right\} \tag{88}$$

的矢量的全体,式中 u_s 取任意値,而 y_{ik} 是矩陣 Y 的元素。因为矩陣 Y 的行列式等于零,故系数矩陣 $\|y_{ik}\|$ 的秩小于 n。假設它等于某一个数 $r<n$。如我們在[**16**]所知,在这种情形下,公式(88)决定某一个 r 維子空間 R'。

考虑等式

$$D_a Y \boldsymbol{u} = Y D_a \boldsymbol{u} \tag{89}$$

的左边。

矢量 $Y\boldsymbol{u}$ 的分量恰好是(88),因此 $D_a Y\boldsymbol{u}$ 是应用变換 D_a 到子空間 R' 中一个任意的矢量上去的結果。公式(89)的右边是应用变換 Y 到矢量 $D_a\boldsymbol{u}$ 上去的結果,这就是說,右边的分量也是由公式(88)表示,不过在其中以矢量 $D_a\boldsymbol{u}$ 的分量代替 $u_1, u_2, \cdots, u_n$,也就是說,公式(89)的右边也是属于子空間 R' 的一个矢量。因此,将左边和右边比較,我們可以看出:应用变換 D_a 到子空間 R' 的矢量仍得出属于这个子空間的矢量。但是,由[**65**]我們知道,如果 U 变換保持某一个子空間不变,那么它們組成可約表示,这样,定理就証明了。

定理 II 和 III 指出,綫性表示不可約的充分必要条件是下述事实:不存在一个与形式为 kI 的矩陣相异的矩陣,和生成这个綫性表示的矩陣都可交換。

从定理 I 可直接推出,在[**65**]的定理中,提起表示是 U 表示不是必要的,并且一般地可以断言:假如某一个表示的所有矩陣都使某一个子空間保持不变,那么这个表示是可約的。这个断言的

逆是显然的。

67. 阿倍尔群和一阶表示　群 G 称做是可交换的，如果它的所有的元素都是成对地可交换的，也就是說，对于任意的指标，$G_{a_2}G_{a_1}$ 等于 $G_{a_1}G_{a_2}$。設 A_{α_1} 和 A_{α_2} 是某一个綫性表示中对应于 G_{a_1} 和 G_{a_2} 的矩陣。乘积 $G_{a_2}G_{a_1}$ 对应于 $A_{a_2}A_{a_1}$ 而乘积 $G_{a_1}G_{a_2}$ 对应于 $A_{a_1}A_{a_2}$。但是上面所提起說的乘积重合，因此，必須有：

$$A_{a_2}A_{a_1}=A_{a_1}A_{a_2},$$

这就是說，組成可交換群的綫性表示的矩陣是成对地可交換的。

假設表示是 U 表示，即所有的矩陣都是 U 矩陣。在这个情形下，显然存在这样的一个变換 U，使得 UA_aU^{-1} 都有对角綫形[42]，这就是說，在这个情形下，某一个等价綫性表示完全由对角矩陣

$$UA_aU^{-1}=[k_1^{(a)}, \cdots, k_n^{(a)}]$$

所組成。

因此我們看到，在这个情形下，綫性表示可分解为 n 个一阶表示

$$B_a^{(s)}=k_s^{(a)}\quad (s=1, 2, \cdots, n)。$$

这样，可交換群的任一个 U 表示都和某一个一阶表示的集合等价，并且在化为等价表示时也是用 U 变換。

現在来討論一些可交換群的表示的例子以及一些非交換群的一阶表示的例子。

例 1.　作为第一个例子我們来討論由元素

$$S^0=I, S, S^2, \cdots, S^{m-1}\quad (S^m=I) \tag{90}$$

所組成的 m 阶巡回(可交換)群。

如果元素 S 对应于綫性变換 $x'=\omega x$，或者，这是一样的，对应于数 ω，那么元素(90)对应于下列数：

$$1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{m-1}。$$

因为 $S^m=I$，我們必須有 $\omega^m=1$，即

$$\omega=e^{\frac{2k\pi i}{m}},$$

这里 k 是某一个整数，显然它可以等于数列 $0, 1, 2, \cdots, m-1$ 中的一个。

我們仔細地来討論 $m=2$ 的情形。这时有

$$I, S \text{ 和 } S^2=I,$$

这就是說：$S=S^{-1}$。当 $k=0$，I 和 S 这两个元素都对应于同一个恒等变换 $x'=x$ 或者数 1；当 $k=1$，元素 I 对应于变换 $x'=x$，而元素 S 对应于变换 $x'=-x$，或者一般来說，元素 I 对应于数 1，而元素 S 对应于数 (-1)。在物理应用上，由恒等变換和三維空間对于原点的对称变换：

$$x'=-x;\ y'=-y;\ z'=-z \quad (S)。$$

所組成的群是很重要的。

显然，这就是 $m=2$ 的情形。上述两个表示可以称做对称于原点的恒等表示和变号表示。

例 2. 考虑圍繞 Z 軸的轉动群。这个群的矩陣有下述形式：

$$Z_\varphi=\begin{Vmatrix} \cos\varphi, & -\sin\varphi \\ \sin\varphi, & \cos\varphi \end{Vmatrix} \tag{91}$$

此外并滿足显然的关系：

$$Z_{\varphi_2}Z_{\varphi_1}=Z_{\varphi_1}Z_{\varphi_2}=Z_{\varphi_1+\varphi_2},$$

这是我們早就知道的。

函数 $e^{l\varphi}$ 也同样地满足这个关系。

但是必須注意：如果 $\varphi=2\pi$，那么轉动就等于恒等变换，因此我們必須有 $e^{2\pi l}=1$，也就是說，数 l 必須是 $l=ki$，这里 k 是任意的整数。因此我們有轉动群的綫性表示的无穷集合，这里矩陣(91)对应于数

$$e^{\varphi ki}。$$

給整数 k 以所有可能的値

$$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$$

我們就得到轉动群的无穷多个綫性表示。

例 3. 現在来討論由 n 个数的 $n!$ 个置換所組成的群。我們可以將每一个置換与数 $(+1)$ 相对应，这样就得到所謂置換群的对称表示。另外，我們可以將第一类中由偶数个对換組成的每个置換与数 $(+1)$ 对应，而將第二类的每一个置換与数 (-1) 对应。这样就得到所謂置換群的反对称表示。在这个表示中交替群中的每一个置換都对应于数 $(+1)$，而其余的置換对应于数 (-1)。可以証明(从略)，上述两种情形，已經概括了置換群的所有可能的一阶綫性表示。这个群还有高于一阶的另一些表示。

例 4. 現在来討論由所有平面的实正交变換所組成的群，即由平面圍繞原点的轉动和对于軸的对称变換同时施行所組成的群。我們在[52]知道，这个群的矩陣有下述形式：

$$\{\varphi,\ d\}=\begin{Vmatrix} d\cos\varphi, & -d\sin\varphi \\ \sin\varphi, & \cos\varphi \end{Vmatrix}, \tag{92}$$

其中对于单純的轉动 $d=1$，而对于轉动和反射同时施行，$d=-1$，除了每一个矩陣(92)都对应于数 $(+1)$ 的显然的一阶綫性表示外，我們再可以作另一个一阶綫性表示：如果 $d=1$ 則矩陣(92)对应于数 $(+1)$，而当 $d=-1$ 則矩陣(92)对应于数 (-1)，因为当两个矩陣(92)的 d 同号时，它們的积对应于单純的轉动，而当 d 异号时，它們的积对应于轉动和反射同时施行。

68. 两个变数的 U 群的綫性表示 現在来討論两个变数的 U 群的綫性表示。我們知道，这个群有形式：

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= ax_1+bx_2, \\ x_2' &= -\bar{b}x_1+\bar{a}x_2, \end{aligned}\right\} \tag{93}$$

其中复数 a 和 b 必須受条件

$$a\bar{a}+b\bar{b}=1 \tag{94}$$

的限制。

作$(m+1)$个量：

$$\xi_0=x_1^m;\ \xi_1=x_1^{m-1}x_2;\ \cdots;\ \xi_m=x_2^m。 \tag{95}$$

假如我們取 $\xi'_k=x_1'^{m-k}x_2'^k$ 并且用 x'_1 和 x'_2 的表示式 (93) 来代替 x'_1 和 x'_2，那么显然地，每一个 ξ'_k 被 ξ_k 所綫性表示，因此群(93)中的每一个变换将对应于由变数 ξ_k 到变数 ξ'_k 的一个綫性变换。显然，变换的乘积对应于变换的乘积，因此我們得到群(93)的一个$(m+1)$阶綫性表示。但是，我們发現，这个表示不是 U 表示。为了作成一个 U 表示，我們只需在变数 (95) 中，对每一个变数乘上一个常数因子，就是，代替(95)，我們按照下述公式来定义变数：

$$\eta_k=\frac{x_1^{m-k}x_2^k}{\sqrt{(m-k)!\,k!}} \quad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ m), \tag{96$_1$}$$

同样地：

$$\eta'_k=\frac{x_1'^{m-k}x_2'^k}{\sqrt{(m-k)!\,k!}} \quad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ m), \tag{96$_2$}$$

和通常一样，在式中我們认为 $0!=1$。

我們来驗明：在变数这样定义之下，我們的表示是 U 表示，卽：

$$\sum_{k=0}^{m}\eta'_k\bar{\eta}'_k=\sum_{k=0}^{m}\eta_k\bar{\eta}_k。 \tag{97}$$

事实上，应用牛頓的二項公式，有：

$$m!\sum_{k=1}^{m}\eta'_k\bar{\eta}'_k=m!\sum_{k=0}^{m}\frac{x_1'^{m-k}\bar{x}_1'^{m-k}x_2'^k\bar{x}_2'^k}{(m-k)!\,k!}=(x'_1\bar{x}'_1+x'_2\bar{x}'_2)^m$$

同样有：
$$m!\sum_{k=0}^{m}\eta_k\bar{\eta}_k=(x_1\bar{x}_1+x_2\bar{x}_2)^m。$$

但因(93)是一个 U 变换：

$$x'_1\bar{x}'_1+x'_2\bar{x}'_2=x_1\bar{x}_1+x_2\bar{x}_2$$

因此，可推出关系式(97)成立。

我們現在來給出所建立的群(93)的 U 表示的系数的明显形式的公式。为了这个目的，稍改一下前面用的記号，就是我們假設：

$$\eta_l=\frac{x_1^{j+l}x_2^{j-l}}{\sqrt{(j+l)!\,(j-l)!}}\quad(l=-j,\ -j+1,\ \cdots,\ j-1,\ j)。\tag{98}$$

在我們以前的符号中，$m=2j$，因此当 m 是偶数时，j 是一个整数，而当 m 是奇数时，j 就等于某一个奇整数的二分之一。例如，如果 $m=5$，那么公式(98)給我們下面的六个变数：

$$\eta_{-\frac{5}{2}}=\frac{x_2^5}{\sqrt{5!}};\quad \eta_{-\frac{3}{2}}=\frac{x_1x_2^4}{\sqrt{1!4!}};\quad \eta_{-\frac{1}{2}}=\frac{x_1^2x_2^3}{\sqrt{2!3!}};$$

$$\eta_{\frac{1}{2}}=\frac{x_1^3x_2^2}{\sqrt{3!2!}};\quad \eta_{\frac{3}{2}}=\frac{x_1^4x_2}{\sqrt{4!1!}};\quad \eta_{\frac{5}{2}}=\frac{x_1^5}{\sqrt{5!}}。$$

在这个情形，我們的变数不是用前六个整数来編号，而是用分数来編号，这些分数从 $\left(-\frac{5}{2}\right)$ 到 $\left(+\frac{5}{2}\right)$ 每一个相差1。例如，如果 $m=4$，那么根据公式(98)我們有五个变数：

$$\eta_{-2}=\frac{x_2^4}{\sqrt{4!}};\quad \eta_{-1}=\frac{x_1x_2^3}{\sqrt{1!3!}};\quad \eta_0=\frac{x_1^2x_2^2}{\sqrt{2!2!}};$$

$$\eta_1=\frac{x_1^3x_2}{\sqrt{3!1!}};\quad \eta_2=\frac{x_1^4}{\sqrt{4!}}。$$

这里变数用从(−2)到(+2)的整数編号。对于每一个固定的 $m=2j$，在矩陣中，我們有完全相同的行和列的編号，这些矩陣是給出群(93)的一个 $(2j+1)$ 阶綫性表示的。

現在来决定这些矩陣的元素。我們有：

$$\eta_l'=\frac{x_1'^{j+l}x_2'^{j-l}}{\sqrt{(j+l)!\,(j-l)!}}=\frac{(ax_1+bx_2)^{j+l}(-\bar{b}x_1+\bar{a}x_2)^{j-l}}{\sqrt{(j+l)!\,(j-l)!}},$$

我們必須將右边化为量 η_l 的綫性組合。牛頓二項公式的应用給出：

$$\eta'_l=\sum_{k=0}^{j+l}\sum_{k'=0}^{j-l}(-1)^{j-l-k'}\frac{\sqrt{(j+l)!\,(j-l)!}}{k!\,k'!\,(j+l-k)!\,(j-l-k')!}\times$$
$$\times\bar{a}^{k'}a^{j+l-k}\bar{b}^{j-l-k'}b^{k}x_1^{2j-k-k'}x_2^{k+k'}。$$

假如我們认为当 p 是負整数时，$p!=\infty$，那么我們可以在上述公式中根据 k 和 k' 从 $(-\infty)$ 到 $(+\infty)$ 求和，因为所增加的項中包含等于无穷的分母的因子，因此等于零。我們引进一个和的新的下标 $s=j-k-k'$ 来代替 k'，对于 s 我們仍可以从 $(-\infty)$ 到 $(+\infty)$ 按整值或者整数的二分之一来求和，这个要根据 j 是整数或者是整数的二分之一来决定。因此我們得到：

$$\eta'_l=\sum_{k}\sum_{s}(-1)^{k+s-l}\frac{\sqrt{(j+l)!\,(j-l)!}}{k!\,(j-k-s)!\,(j+l-k)!\,(k+s-l)!}\times$$
$$\times\bar{a}^{j-k-s}a^{j+l-k}\bar{b}^{k+s-l}b^{k}x_1^{j+s}x_2^{j-s}。$$

但是由于(98)我們有：

$$x_1^{j+s}x_2^{j-s}=\sqrt{(j+s)!\,(j-s)!}\,\eta_s,$$

因此，最后我們就得到下述形式的显明的綫性关系：

$$\eta'_l=\sum_{k}\sum_{s}(-1)^{k+s-l}\frac{\sqrt{(j+l)!\,(j-l)!\,(j+s)!\,(j-s)!}}{k!\,(j-k-s)!\,(j+l-k)!\,(k+s-l)!}\times$$
$$\times\bar{a}^{j-k-s}a^{j+l-k}\bar{b}^{k+s-l}b^{k}\eta_s。$$

因此，对于已知固定的 j，对应于矩陣为

$$\begin{Vmatrix} a, & b\\ -\bar{b}, & \bar{a}\end{Vmatrix}$$

的 U 变换(93)的 $(2j+1)$ 阶綫性表示的矩陣的元素是：

$$D_j\begin{Bmatrix} a, & b\\ -\bar{b}, & \bar{a}\end{Bmatrix}_{ls}=$$
$$=(-1)^{s-l}\sum_{k}(-1)^{k}\frac{\sqrt{(j+l)!\,(j-l)!\,(j+s)!\,(j-s)!}}{k!\,(j-k-s)!\,(j+l-k)!\,(k+s-l)!}\times$$
$$\times\bar{a}^{j-k-s}a^{j+l-k}\bar{b}^{k+s-l}b^{k}。\tag{99}$$

这里指标 l 和 s 取下列一系值。

$$l \text{ 和 } s=-j,\ -j+1,\ \cdots,\ j-1,\ j,$$

并且我們再重复一遍：如果 j 是整数的二分之一，那么矩陣的行和列同样也以整数的二分之一来編号。注意到当 p 是負整数时，$p!=\infty$，我們就得到公式(99)中对 k 求和的范圍：

$$k\geqslant 0;\ k\geqslant l-s;\ k\leqslant j-s;\ k\leqslant j+l。 \tag{100}$$

将矩陣化为相似矩陣，我們可以看出公式(99)的可能的簡化。設 A 是一个元素为 a_{pq} 的矩陣，$S=[\delta_1,\ \cdots,\ \delta_n]$ 是一个对角矩陣。

应用一般的乘法規則，不难看出矩陣 SAS^{-1} 的元素是：

$$\{SAS^{-1}\}_{pq}=\delta_p a_{pq}\delta_q^{-1}。$$

假如現在我們将这个規則应用于矩陣

$$D_j\begin{Bmatrix} a, & b \\ -\bar{b}, & \bar{a} \end{Bmatrix}$$

并且取 $\delta_k=(-1)^k$，那么在公式(99)中因子 $(-1)^{s-l}$ 就消去了，因此在以后我們将认为这个因子是沒有的。

現在来証明：由元素为(99)的矩陣所决定的 U 群(93)的綫性表示是不可約的。首先来証明两个引理。

引理 I. 如果某一个对角矩陣，它的对角綫上的元素是各不相同的，与矩陣 A 是可交換的，那么 A 也是对角矩陣。

根据条件我們有：

$$A[\delta_1,\ \cdots,\ \delta_n]=[\delta_1,\ \cdots,\ \delta_n]A,$$

其中 δ_k 是各不相同的。設矩陣 A 的元素是 a_{pq}。应用乘法規則，由上述条件可得

$$a_{pq}\delta_q=\delta_p a_{pq} \text{ 或 } a_{pq}(\delta_q-\delta_p)=0,$$

因此，$a_{pq}=0$ 如果 $p\neq q$，这就是說，矩陣 A 确实是一个对角矩陣。

引理 II. 假如某一个对角矩陣 $[\delta_1,\ \cdots,\ \delta_n]$ 和矩陣 A 是可交換的，A 中至少有一列不包含一个零，那么 $\delta_1=\cdots=\delta_n$。

将矩陣的行和列調換，即化为相似矩陣，我們可以使不包含零

的那一列在第一列。在这种变换中，对角矩陣仍然为对角矩陣，幷且依旧和我們的矩陣可交换。因此，用 a_{pq} 表示矩陣 A 的元素，我們可以认为

$$a_{i1}\neq 0 \quad (i=1, 2, \cdots, n),$$

此外根据条件，如前面一样有：

$$a_{i1}(\delta_1-\delta_i)=0 \quad (i=1, 2, \cdots, n),$$

由此可得 $\delta_1=\cdots=\delta_n$，因此引理就被証明了。

現在来証明由矩陣(99)所决定的綫性表示是不可約的。設 Y 是某一个 $(2j+1)$ 阶矩陣，它和所有的矩陣

$$D_j\begin{Bmatrix} a, & b \\ -\bar{b}, & \bar{a} \end{Bmatrix}$$

都是可交换的，其中 D_j 由不同的 a 和 b 而得到，幷滿足条件(94)。为了証明不可約性，只需証明 Y 必須是数量矩陣。首先考虑当 $b=0$ 而 $a=e^{i\alpha}$ 的情形。这两个复数显然滿足条件(94)。

利用公式(99)，我們首先可得出，

$$D_j\begin{Bmatrix} e^{i\alpha}, & 0 \\ 0, & e^{-i\alpha} \end{Bmatrix}_{ls}=0 \text{ 当 } l\neq s,$$

而在这种情形对角綫上的元素是

$$D_j\begin{Bmatrix} e^{i\alpha}, & 0 \\ 0, & e^{-i\alpha} \end{Bmatrix}_{ll}=e^{i2l\alpha} \quad (l=-j, -j+1, \cdots, j-1, j)$$

因此我們的矩陣将有下列形式：

$$D_j\begin{Bmatrix} e^{i\alpha}, & 0 \\ 0, & e^{-i\alpha} \end{Bmatrix}=\begin{Vmatrix} e^{-i2j\alpha}, & 0, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & e^{-i2(j-1)\alpha}, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & 0, & e^{-i2(j-2)\alpha}, & \cdots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & \cdots, & e^{i2j\alpha} \end{Vmatrix}, \quad (101)$$

这就是說，对于适当选擇的 α，这是一个对角綫上的元素都不相同

的对角矩陣。应用第一个引理，我們可以断定，矩陣 Y，它必須和矩陣(101)是可変換的，也应該是一个对角矩陣，即：

$$Y=[\delta_1,\ \cdots,\ \delta_n]。\tag{102}$$

現在来討論当 a 和 b 都不是零的情形，并且取矩陣

$$D_j\left\{\begin{matrix} a, & b \\ -\bar{b}, & \bar{a}\end{matrix}\right\}$$

的第一列。矩陣的元素根据公式(99)而决定，假如我們在那里假設 $s=-j$。在这个情形，不等式(100)給我們：

$$k\geqslant 0;\ k\geqslant l+j;\ k\leqslant 2j;\ k\leqslant j+l,$$

$$(l=-j,\ -j+1,\ \cdots,\ j-1,\ j),$$

由此显然地：在这个情形下，公式(99)中出現的和都归到同一个項，这个項是当 $k=j+l$ 时被得到的并且不等于零。因此，在这个情形下，矩陣 $D_j\left\{\begin{matrix} a, & b \\ -\bar{b}, & \bar{a}\end{matrix}\right\}$ 的第一列确实不包含零。但是对角矩陣(102)又必須和这个矩陣可変換，于是，根据引理 II，所有的数 δ_p 都是相同的，这就是說，Y 是一个数量矩陣。因此矩陣 $D_j\left\{\begin{matrix} a, & b \\ -\bar{b}, & \bar{a}\end{matrix}\right\}$ 实际上給出 U 群(93)的一个不可約綫性表示。給 j 以一列值：

$$j=0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \cdots,$$

我們就得到无限多个这样的綫性表示。当 $j=0$ 时，我們得到恒等变換，在这个变換之下，群(93)的每一个元素都对应于数1。現在来討論，当 $j>0$ 时，群(93)的那一些变換对应于表示群 $D_j\left\{\begin{matrix} a, & b \\ -\bar{b}, & \bar{a}\end{matrix}\right\}$ 的恒等变換，这个变換是被等式 $\eta_l'=\eta_l$ 或同样地被等式

$$(ax_1+bx_2)^{j+l}(-\bar{b}x_1+\bar{a}x_2)^{j-l}=x_1^{j+l}x_2^{j-l}$$

$$(l=-j,\ -j+1,\ \cdots,\ j-1,\ j)$$

所决定的。

設 $j=l$，我們就得到

$$(ax_1+bx_2)^{2j}=x_1^{2j},$$

由此可推出 $b=0$，并且上列恒等式可写成：

$$a^{j+l}\bar{a}^{j-l}x_1^{j+l}x_2^{j-l}=x_1^{j+l}x_2^{j-l} \quad (l=-j,\ -j+1,\ \cdots,\ j-1,\ j)$$

因此 $a^{j+l}\bar{a}^{j-l}=1$。但是当 $b=0$ 时 $|a|=1$，因此最后的等式可写成

$$a^{2l}=1 \quad (l=-j,\ -j+1,\ \cdots,\ j-1,\ j)$$

如果 j 是奇数的二分之一，那么我們可以令 $l=\frac{1}{2}$，就得到 $a=1$。如果 j 是整数，那么等式 $a^{2l}=1$ 引出 $a^2=1$，因此 $a=\pm 1$。

因此，如果 j 是奇数的二分之一，那么群 $D_j\left\{\begin{matrix} a, & b \\ -\bar{b}, & \bar{a}\end{matrix}\right\}$ 中的恒等变换对应于群 (93) 的恒等变换，这就是說，这种情形下，$D_j\left\{\begin{matrix} a, & b \\ -\bar{b}, & \bar{a}\end{matrix}\right\}$ 是群 (93) 的一个 1−1 单值的表示。如果 j 是一个整数，那么群 $D_j\left\{\begin{matrix} a, & b \\ -\bar{b}, & \bar{a}\end{matrix}\right\}$ 中的恒等变换对应于群 (93) 中矩陣为

$$E=\begin{Vmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1\end{Vmatrix}; \quad S=\begin{Vmatrix} -1, & 0 \\ 0, & -1\end{Vmatrix}=-E$$

的两个变换。这两个变换組成一个二阶巡回群，而 $D_j\left\{\begin{matrix} a, & b \\ -\bar{b}, & \bar{a}\end{matrix}\right\}$ 是商群[58]的单价表示。換句話說，当 j 是整数时，表示 $D_j\left\{\begin{matrix} a, & b \\ -\bar{b}, & \bar{a}\end{matrix}\right\}$ 中的每一个变换对应于群 (93) 的两个变换，这两个变换的 a 和 b 仅相差一个符号。

69. 轉动群的綫性表示 上面的結果是非常重要的，因为 U 群 (93) 和三維空間的轉动群有着紧密的联系并且上面得到的結果使我們得到轉动群的一些不可約表示。

每一个 U 变换 (93) 都对应于确定的轉动，而且同时改变 a 和

b 的符号所得的 U 变换对应于同样的轉动。参数 a 和 b 根据公式 [63]:

$$a=e^{-\frac{1}{2}i(\gamma+\alpha)}\cos\frac{1}{2}\beta;\quad b=-ie^{\frac{1}{2}i(\gamma-\alpha)}\sin\frac{1}{2}\beta \tag{103}$$

和尤拉角联系着。

首先討論当 j 是整数的情形。在这个情形下公式(99)告訴我們：同时改变 a 和 b 的符号时，右边的項不改变，因为在这个情形，a, $\bar{a}$, b和 $\bar{b}$ 的指标的和等于偶数 $2j$。因此，在这个情形下，給出同一个轉动的两个 U 变换对应于綫性表示中同一个矩陣。換句話說，当 j 是整数时每一个尤拉角为 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ 的轉动对应于綫性表示 D_j 中的一个确定的矩陣。現在我們代替 $D_j\begin{Bmatrix} a, & b \\ -\bar{b}, & \bar{a}\end{Bmatrix}$ 而用

$$D_j\{\alpha, \beta, \gamma\} \tag{104}$$

来表示这个矩陣。

如果 j 是整数的二分之一，那么同时改变 a, b 的符号使所有的表示 (99) 的符号都改变，这就是說，在这个情形下，产生同一个运动的那些 U 变换对应于不同的矩陣，就是它們所有的元素都相差一个符号的矩陣，也就是說，在这个情形下，在 (104) 中 D_j 的前面我們必須放上两个符号。因此，当 j 是整数时，矩陣 (104) 給我們轉动群的一个綫性表示。当 j 等于整数的二分之一时，严格地說，我們得不到綫性表示。在这个情形就說是一个双值綫性表示。

为了得到矩陣(104)的元素的表示式，只要在(99)式中按照公式(103)来代替 a 和 b。因此，去掉前面的因子$(-1)^{s-l}$，我們得到

$$D_j\{\alpha,\beta,\gamma\}_{ls}=i^{s-l}\sum_k(-1)^k\frac{\sqrt{(j+l)!(j-l)!(j+s)!(j-s)!}}{k!(j-k-s)!(j+l-k)!(j+s-l)!}\times$$

$$\times e^{-il\alpha-is\gamma}\cos^{2j+l-2k-s}\frac{1}{2}\beta\sin^{2k+s-l}\frac{1}{2}\beta。\tag{105}$$

如果利用矩陣

$$X=\begin{Vmatrix} 0, 0, \cdots, 0, 1 \\ 0, 0, \cdots, 1, 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0, 1, \cdots, 0, 0 \\ 1, 0, \cdots, 0, 0 \end{Vmatrix}$$

化为等价表示，那么情况变为在相反的次序下对調行和列，也可以說，在这个情形下，值 l 和 s 变为 $(-l)$ 和 $(-s)$。因此，代替公式(105)，我們可以写下另一个公式：

$$D'_j\{\alpha,\beta,\gamma\}_{ls}=i^{l-s}\sum_k(-1)^k\frac{\sqrt{(j+l)!(j-l)!(j+s)!(j-s)!}}{k!(j-k+s)!(j-l-k)!(k-s+l)!}\times$$

$$\times e^{il\alpha+is\gamma}\cos^{2j-l-2k+s}\frac{1}{2}\beta\sin^{2k-s+l}\frac{1}{2}\beta, \qquad (106)$$

而且，利用[68]中同样的方法，我們可以把因子 i^{l-s} 去掉。

注意一个簡单的特殊情形。当 $j=0$ 我們有一阶綫性表示

$$\eta'=\eta。$$

这是恒等表示。当 $j=\frac{1}{2}$ 时，我們有 $2j+1=2$，而量 $\eta_{-\frac{1}{2}}$ 和 $\eta_{\frac{1}{2}}$ 就簡单地等于 x_2 和 x_1，这就是說，在这个情形下，U 群是它自身的綫性表示(相差一个行和列的調換)。

对于运动群，我們得到由矩陣

$$D'_{1/2}\{\alpha, \beta, \gamma\}=\begin{Vmatrix} e^{-\frac{1}{2}i(\gamma+\alpha)}\cos\frac{1}{2}\beta, & ie^{\frac{1}{2}i(\gamma-\alpha)}\sin\frac{1}{2}\beta \\ ie^{-\frac{1}{2}i(\gamma-\alpha)}\sin\frac{1}{2}\beta, & e^{\frac{1}{2}i(\gamma+\alpha)}\cos\frac{1}{2}\beta \end{Vmatrix}$$

所决定的二阶双值表示，当 $j=1$ 我們有三阶綫性表示

$$D_1'\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}=$$

$$=\left\|\begin{matrix} e^{-i(\gamma+\alpha)}\dfrac{1+\cos\beta}{2}, & -e^{-i\alpha}\dfrac{\sin\beta}{\sqrt{2}}, & e^{i(\gamma-\alpha)}\dfrac{1-\cos\beta}{2}, \\ e^{-i\gamma}\dfrac{\sin\beta}{\sqrt{2}}, & \cos\beta; & -e^{i\gamma}\dfrac{\sin\beta}{\sqrt{2}}, \\ e^{-i(\gamma-\alpha)}\dfrac{1-\cos\beta}{2}, & e^{i\alpha}\dfrac{\sin\beta}{\sqrt{2}}, & e^{i(\gamma+\alpha)}\dfrac{1+\cos\beta}{2}, \end{matrix}\right\|。$$

当 j 是整数时，綫性表示 $D_j'\{\alpha,\beta,\gamma\}$ 給出轉动群的一个 $1-1$ 单値表示。这个情形可以直接从下述事实推出，每一个 $D_j\{\alpha,\beta,\gamma\}$ 对应于群(93)中的两个矩陣，它們只相差一个符号，而我們在前面已經提起过，这样的矩陣是对应于同一个轉动的。假如 j 是奇数的二分之一，那么每一个轉动对应于表示 $D_j\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$ 中的两个矩陣，它們只相差一个符号。特别地，轉动群的单位变換对应于 $D_j\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$ 中的矩陣 $\pm E$，其中 E 是 $(2j+1)$ 阶的单位矩陣。如果限制 $D_j\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$ 中的变换足够地接近于恒等变換，那么 $D_j\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$ 就是轉动群的一个单値表示。在这个情形，在一般的公式(106)中只要限制 α, β 和 γ——足够地接近于零。但是假如我們加 2π 到 α 或 γ，那么，因为 s 和 l 是奇数的一半，矩陣 $D_j\{\alpha,\beta,\gamma\}$ 的元素都改变符号，因此我們就得到实际上是同一个轉动的第二个表示。我們更指明：所指出的表示是轉动群的全部同构的不可約表示。

因为表示 $D_j\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$ 是轉动群的不可約表示的全部，那么矩陣 $D_j\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$ 必須相似于矩陣 $D\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$，这个矩陣对应于尤拉角为 $\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$ 的空間轉动。在[**63**]我們看到，$D=Z_\alpha X_\beta Z_\gamma$，連乘右边的矩陣，我們得到：

$$D=$$

$$=\left|\begin{matrix} \cos\alpha\cos\gamma-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma, & -\cos\alpha\sin\gamma-\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma, & \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma, & -\sin\alpha\sin\gamma+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma, & -\cos\alpha\cos\beta \\ \sin\beta\sin\gamma, & \sin\beta\cos\gamma, & \cos\beta \end{matrix}\right|,$$

并且不难驗明公式:

$$AD_1'\{\alpha, \beta, \gamma\}A^{-1}=D\{\alpha, \beta, \gamma\},$$

其中

$$A=\begin{Vmatrix}1, 0, & 1\\ i, 0, & -i\\ 0, \sqrt{2}i, & 0\end{Vmatrix}。$$

70. 关于轉动群的单純性的定理 我們現在来証明轉动群是单純群,这就是說,它沒有正規子群 [58]。假如有这样的子群,那么在 [63] 已指出,它必須对应于行列式为 1 的变換(57)的群 G 的一个正規子群,这个正規子群与由 E 及 $(-E)$ 所組成的正規子群 H 不同。因此我們只要証明:群 G 沒有异于 H 的正規子群,也就是說,我們必須指明,如果群 G 的正規子群 H_1 包含矩陣 A,不同于 E 和 $(-E)$,那么 H_1 与 G 重合。首先注意,如果 H_1 包含某一个矩陣 B,那么由正規子群的定义,它必須包含所有的矩陣 $U^{-1}BU$,其中 U 是群 G 的任一个矩陣。用适当的方法选擇矩陣 U,我們可以得到群 G 的任意一个和矩陣 B 有相同特征值的矩陣。因此,为了証明 H_1 与 G 重合,只需証明 H_1 包含有任何可能的特征值的矩陣,这些数必須有 $e^{i\omega}$ 和 $e^{-i\omega}$ 的形式,其中 ω 是一个实数,因为是 U 矩陣,而且它的行列式等于 1。

在上面指出,我們可以取矩陣 $U^{-1}AU$ 来代替 A,因此可以认为 A 是一个对角矩陣。

这样,H_1 必須包含一个矩陣 $A=\{e^{i\varphi}, e^{-i\varphi}\}$,其中 φ 是实数并且 $e^{i\varphi}\neq\pm1$。因此 $A^{-1}=[e^{-i\varphi}, e^{i\varphi}]$。取 G 中任一矩陣:

$$U=\begin{Vmatrix}x, & y\\ -\bar{y}, & \bar{x}\end{Vmatrix}\quad (x\bar{x}+y\bar{y}=1)。$$

在此

$$U^{-1}=\begin{Vmatrix}\bar{x}, & -y\\ \bar{y}, & x\end{Vmatrix}。$$

因为子群 H_1 包含 A 并且是正規子群,它必須也包含矩陣:

$$Y=A(UA^{-1}U^{-1})。$$

将矩陣連乘并应用等式 $x\bar{x}+y\bar{y}=1$，我們就得到矩陣 Y 的迹 s 的下列表示式

$$s=2-4y\bar{y}\sin^2\varphi=2-4\rho^2\sin^2\varphi,$$

其中 $\rho=|y|$ 可以取区間 $0\leqslant\rho\leqslant1$ 中的任意值，并且 $\sin\varphi\neq0$。矩陣 Y 的特征值 $(e^{i\alpha}, e^{-i\alpha})$ 是下列方程的根：

$$\lambda^2-s\lambda+1=0,\ 即\ \lambda^2+(4\rho^2\sin^2\varphi-2)\lambda+1=0。$$

当 ρ 从 $\rho=0$ 到 $\rho=1$ 改变时，α 取从 $\alpha=0$ 到 $\alpha=2\varphi$ 的值。引进下述符号：

$$U_\beta=[e^{i\beta}, e^{-i\beta}]。$$

从上所述可推出：H_1 包含所有的矩陣 H_α，$0\leqslant\alpha\leqslant2\varphi$。現在已經不难指出 H_1 包含任意的矩陣 $U_\beta(\beta>0)$ 了。事实上，选正整数 n 使得满足不等式 $0<\dfrac{\beta}{n}<2\varphi$。于是 H_1 包含 $U_{\frac{\beta}{n}}$，而因此也包含

$$U_{\frac{\beta}{n}}^n=U_\beta。$$

因此 H_1 包含有任何特征值的矩陣，由上所述，它和 G 重合。因此我們証明了：轉动群是一个单純群。

由此直接推出，轉动群不可能有准同构（不是同构的）表示。事实上，如果有这样的表示，那么对应于表示群中恒等变换的那些轉动組成一个正規子群，而这是不可能的。

71. 拉普拉斯方程和轉动群的綫性表示 我們現在来說明群的綫性表示和微分方程間的关系。这个关系是綫性表示在近代物理問題上的应用的基础。我們从拉普拉斯方程的最簡单情形开始[**II, 192**]，它不給我們什么新的东西而只是用来說明一般的問題。首先确定几个一般事实，它們在群的綫性表示的問題中是很重要的，它們的特殊情形在前面提起的几个例子中我們已經知道了。

設群 G，它的綫性表示已經构成了，是一个 n 阶的綫性变换群：

$$x'_k = g_{k1}^{(\alpha)} x_1 + \cdots + g_{kn}^{(\alpha)} x_n \quad (k=1, 2, \cdots, n), \tag{107}$$

其中指数 α 标志群 G 的元素，它可以取遍有限个或无穷个值。再假設，有 m 个函数

$$\varphi_s(x_1, \cdots, x_n) \quad (s=1, 2, \cdots, m) \tag{108}$$

它們是这样的：当独立变数按照公式 (107) 变换时，这些函数也經受某一个綫性变换：

$$\varphi_s(x'_1, \cdots, x'_n) = a_{s1}^{(\alpha)} \varphi_1(x_1, \cdots, x_n) + \cdots + a_{sm}^{(\alpha)} \varphi_m(x_1, \cdots, x_n)$$
$$(s=1, 2, \cdots, m)。 \tag{109}$$

此处我們有元素为 $a_{is}^{(\alpha)}$ 的矩陣 A_α，对应于群 G 的变换 (107)。考虑群的两个变换

$$(x'_1, \cdots, x'_n) = G_{\alpha_1}(x_1, \cdots, x_n);$$
$$(x''_1, \cdots, x''_n) = G_{\alpha_2}(x'_1, \cdots, x'_n);$$
$$G_{\alpha_3} = G_{\alpha_2} G_{\alpha_1}。$$

函数 (108) 对应的变换是：

$$\varphi_s(x'_1, \cdots, x'_n) = a_{s1}^{(\alpha_1)} \varphi_1(x_1, \cdots, x_n) + \cdots + a_{sm}^{(\alpha_1)} \varphi_m(x_1, \cdots, x_n) \tag{110$_1$}$$

及

$$\varphi_s(x''_1, \cdots, x''_n) = a_{s1}^{(\alpha_2)} \varphi_1(x'_1, \cdots, x'_n) + \cdots + a_{sm}^{(\alpha_2)} \varphi_m(x'_1, \cdots, x'_n)。 \tag{110$_2$}$$

在 (110_2) 中用 $\varphi_s(x'_1, \cdots, x'_n)$ 的表示式 (110_1) 来表示它們，就有用 $\varphi_s(x_1, \cdots, x_n)$ 来表 $\varphi_s(x''_1, \cdots, x''_n)$ 的直接关系，这个关系給出矩陣 A_{α_3}。因此我們有

$$\{A_{\alpha_3}\}_{ik} = \sum_{s=1}^{m} a_{is}^{(\alpha_2)} a_{sk}^{(\alpha_1)}, \quad 即 \quad A_{\alpha_3} = A_{\alpha_2} A_{\alpha_1},$$

公式 (109) 显然决定了群 G 的一个 m 阶綫性表示。在上面的討論

中我們认为函数 φ_s 是綫性无关的。在这个条件下，变换 (109) 完全和单值地决定了并且 $D(A_\alpha)\neq 0$，因为否則 $\varphi_s(x_1', \cdots, x_n')$ 就要是綫性相关的。

特别当建立 U 群的綫性表示时，函数 φ_s 就是函数 (96_1)。

假設 G 是三維空間的轉动群，因此 $n=3$，又假設函数 φ_s 在某一个以原点为中心的球 K 内是正交标准的，即

$$\iiint_K \varphi_p(x_1, x_2, x_3)\overline{\varphi_q(x_1, x_2, x_3)}\,dx_1\,dx_2\,dx_3=\delta_{pq}。\tag{111}$$

現在来說明，在这个情形下，轉动群的綫性表示(109)是 U 表示。事实上，轉动 G_α 的結果，球 K 变为自已，并且我們知道 G_α 的行列式等于 1。条件 (111) 給我們：

$$\iiint_K \varphi_p(x_1', x_2', x_3')\overline{\varphi_q(x_1', x_2', x_3')}\,dx_1'\,dx_2'\,dx_3'=\delta_{pq},$$

或者由于 (109)，得：

$$\iiint_K \Big[\sum_{i=1}^m a_{pi}^{(\alpha)}\varphi_i(x_1,x_2,x_3)\sum_{j=1}^m \overline{a_{qj}^{(\alpha)}\varphi_j(x_1,x_2,x_3)}\Big]\,dx_1'\,dx_2'\,dx_3'=\delta_{pq}。$$

轉到变数 (x_1, x_2, x_3)，由于在三重积分中的变数变换規則，我們必須直接以 $dx_1\,dx_2\,dx_3$ 代替 $dx_1'\,dx_2'\,dx_3'$，然后对于同一个球 K 积分。由于条件 (111) 我們有

$$\sum_{i=1}^m a_{pi}^{(\alpha)}\overline{a_{qi}^{(\alpha)}}=\delta_{pq}\qquad (p,\ q=1,\ 2,\ \cdots,\ m),$$

其中，和通常一样，当 $p\neq q$ 时，$\delta_{pq}=0$ 而 $\delta_{pp}=1$，即在这种情形，矩陣 A 中的每一个的行都是正交的，因此它的轉置矩陣的列是正交的，由 [28] 它的行是正交的，这就是說，原来的矩陣的行和列都是正交的，或者換句話說，矩陣 A 实际上对于任一个 α 都是一个 U 矩陣。

現在来討論含有两个变数的拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0 \tag{112}$$

或者用矢量表示

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U=0。 \tag{113}$$

取 x, y 的一个 l 次齐次的多項式:

$$\varphi_l(x, y)=a_0 x^l+a_1 x^{l-1} y+\cdots+a_k x^{l-k} y^k+\cdots+a_l y^l。 \tag{114}$$

要説明,存在两个形式为 (114) 的綫性无关的多項式,它們是方程(112)的解,并且每一个由齐 l 次多項式所表示的方程式(112)的解都是它們的常系数的綫性組合,事实上,多項式 (114) 的系数被公式

$$a_k=\frac{1}{(l-k)!k!} \frac{\partial^l \varphi_l(x, y)}{\partial x^{l-k} \partial y^k}$$

所表示。

但是这个多項式又必須满足方程(112),因此,因为方程(112)可改写成:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

所以我們可以将同时改变符号的对 x 的双重积分代替对 y 的双重积分。

因此我們可将 a_k 表成:

$$a_k=\pm \frac{1}{(l-k)!k!} \frac{\partial^l \varphi_l}{\partial x^l} \text{ 或 } a_k=\pm \frac{1}{(l-k)!k!} \frac{\partial^l \varphi_l}{\partial x^{l-1} \partial y},$$

卽多項式(114)所有的系数都可用 a_0 和 a_1 来表示。这个結論告訴我們,不可能存在多于两个的綫性无关的 l 次齐次多項式,满足方程 (112)。現在来説明,这样的两个不同的多項式事实上是存在的。为此,我們来考慮齐次多項式

$$\omega_l(x, y)=(x+i y)^l。$$

去括弧并分开虛实部分,我們得到:

$$\omega_l(x, y)=\varphi_l(x, y)+i\psi_l(x, y),$$

其中 φ_l 及 ψ_l 都是 l 次齐次实多项式，并且是彼此綫性无关的。微分 $\omega_l(x, y)$，得：

$$\frac{\partial^2\omega_l(x, y)}{\partial x^2}=l(l-1)(x+iy)^{l-2}; \frac{\partial^2\omega_l(x, y)}{\partial y^2}=$$
$$=-l(l-1)(x+iy)^{l-2},$$

这就是說，$\omega_l(x, y)$ 滿足方程 (112)。因此，同样可指出它的虚实部分也各各滿足这个方程，这就是說，多項式 $\varphi_l(x, y)$ 和 $\psi_l(x, y)$ 給我們两个所要求的方程(112)的解。引进极坐标

$$x=r\cos\varphi; \quad y=r\sin\varphi,$$

由此
$$\omega_l(x, y)=r^l e^{il\varphi}。$$

于是多項式 φ_l 和 ψ_l 就有非常簡单的形式：

$$\varphi_l(x, y)=r^l\cos l\varphi; \quad \psi_l(x, y)=r^l\sin l\varphi。$$

施行以 ϑ 角圍繞原点的 XY 面的旋轉：

$$\left.\begin{aligned} x'&=x\cos\vartheta-y\sin\vartheta, \\ y'&=x\sin\vartheta+y\cos\vartheta。\end{aligned}\right\} \tag{115}$$

不难看出，在这个变换之下，方程 (112) 保持不变，即，正确地說，在新的变数下，方程的形式完全象

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y'^2}=0。 \tag{116}$$

这个可以应用公式 (115) 和复合函数的微分公式直接驗明。此外，所說情况可从下列事实直接推出：方程 (113) 的左边有确定的意义，它不隨坐标的选擇而改变，因此，对于任何的直角坐标都有同一个形式。多項式 $\varphi_l(x', y')$ 和 $\psi_l(x', y')$ 必須滿足方程 (116)，随之而滿足方程 (112)。因此它們必須被 $\varphi_l(x,y)$ 和 $\psi_l(x,y)$ 所綫性表示。这就給了我們平面轉动群的一个綫性表示。

取另两个多項式来代替上述多項式，前者是后两者的綫性組合：

$$\varphi_l'(x, y) = \varphi_l(x, y) - i\psi_l(x, y);$$

$$\psi_l'(x, y) = \varphi_l(x, y) + i\psi_l(x, y)$$

或

$$\varphi_l'(x, y) = (x - iy)^l = r^l e^{-il\varphi};$$

$$\psi_l'(x, y) = (x + iy)^l = r^l e^{il\varphi}。$$

这两个多項式給出下述变換：

$$\varphi_l'(x', y') = r^l e^{-il(\varphi+\vartheta)} = e^{-il\vartheta}\varphi_l'(x, y),$$

$$\psi_l'(x', y') = r^l e^{il(\varphi+\vartheta)} = e^{il\vartheta}\psi_l'(x, y),$$

即，变換(115)对应于綫性表示中的矩陣

$$\begin{Vmatrix} e^{-il\vartheta}, & 0 \\ 0, & e^{il\vartheta} \end{Vmatrix},$$

其中角 ϑ 可以取任意的值。从矩陣的形式可以直接看出，这个綫性表示是已約的，它給出被数 $e^{-il\vartheta}$ 和 $e^{il\vartheta}$ 所决定的两个一阶綫性表示。在所有上面的討論中，整数 l 可有任意值。因此我們得出了平面轉动群的那一些綫性表示，关于它我們在前面 [69] 已經討論过了。

現在来討論三个变数的拉普拉斯方程：

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0。\tag{117}$$

或

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} U = 0。\tag{118}$$

考慮三个变数的 l 次齐次多項式

$$\varphi_l(x, y, z) = a_0 z^l + X_1(x, y) z^{l-1} + X_2(x, y) z^{l-2} + \cdots + X_{l-1}(x, y) z + X_l(x, y),\tag{119}$$

其中$X_k(x, y)$ 是 x, y 的 k 次齐次多項式。每一个这样的多項式 $X_k(x, y)$ 包含 $(k+1)$ 个任意的系数，因此总的三个变数的齐 l 次多項式就包含下列个数的任意的系数：

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (l+1) = \frac{(l+1)(l+2)}{2}。$$

将(119)式代入方程(117)，从左边得到一个$(l-2)$次齐次多項式，让它的系数等于零，就得到多項式$\varphi_l(x,y,z)$的$\frac{(l+1)(l+2)}{2}$个未知系数的$\frac{(l-1)l}{2}$个齐次方程。我們有

$$\frac{(l+1)(l+2)}{2}-\frac{(l-1)l}{2}=2l+1,$$

因此多項式$\varphi_l(x, y, z)$中至少有$(2l+1)$个系数是任意的，也就是說，至少将存在$(2l+1)$个綫性无关的齐l次多項式，滿足方程(117)。应用前面对于两个变数的同样的方法，可以指明，它們不超过$(2l+1)$，也就是說，恰好是$(2l+1)$。用

$$\psi_s^{(l)}(x, y, z) \quad (s=1, 2, \cdots, 2l+1)$$

来表示它們。

如果
$$(x', y', z')=U(x, y, z)$$
是三維空間的某一个圍繞原点的轉动，那么方程(117)保持不变，因此多項式$\psi_s^{(l)}(x, y, z)$給出三維空間轉动群的某一个$(2l+1)$阶綫性表示。

在以后我們将仔細說明这些調和多項式的理論，并且导出它們的显式。我們看到，它們永远这样地被选擇：它們是在一个任意的以原点为中心的球上正交的和标准化的。在这个情形之下，它們生成的轉动群的綫性表示是U表示。可以指出，它們恰好是与表示$D_l\{\alpha, \beta, \gamma\}$等价的一个綫性表示。以后我們将要討論这个問題。

72. 矩陣的直接乘积 設有两个矩陣

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots, & a_{nn} \end{Vmatrix} \quad 和\ B=\begin{Vmatrix} b_{11}, & b_{12}, & \cdots, & b_{1m} \\ b_{21}, & b_{22}, & \cdots, & b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1}, & b_{m2}, & \cdots, & b_{mm} \end{Vmatrix}; \qquad (120)$$

第一个是 n 阶而第二个是 m 阶。組成一个新矩陣 C，它的元素是 $C_{ij;kl}$，是由矩陣 A 的每一个元素及矩陣 B 的每一个元素相乘而得到的：

$$\{C\}_{ij;kl}=c_{ij;kl}=a_{ik}b_{jl}。\tag{121}$$

在这个情形，第一个指标是两个整数 (i, j) 而第二个指标也是两个整数 (k, l)，而且

$$i, k=1, 2, \cdots, n,$$
$$j, l=1, 2, \cdots, m。$$

換句話說，在这里我們有特別的行列的名称，就是：行和列都用两个整数来編号，而且第一个数取从 1 到 n 的值，而第二个数取从 1 到 m 的值。当然，我們可以用一般的方法来将行、列編号，即直接用一个从 1 到 nm 的整数来編号，而且每一对数 (i, j) 或 (k, l) 在新的編号下对应于一个确定的整数，并且如果两对值相同，那么它們就对应于同一个整数。可以有不同的方法来用整数編号。从一个方法到另一个方法引起行列的同时調換，即变为相似矩陣，这在以后不起什么作用。

矩陣 C 叫做矩陣 A 和 B 的直接乘积，一般用

$$C=A\times B\tag{122}$$

来表示。

在这个新的乘积中因子的次序不起作用。

例如，假如两个矩陣 (120) 都是二阶的。那么它們的直接乘积就是一个四阶矩陣，我們可以把它写成：

$$C=\begin{Vmatrix} a_{11}b_{11}, & a_{11}b_{12}, & a_{12}b_{11}, & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21}, & a_{11}b_{22}, & a_{12}b_{21}, & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}, & a_{21}b_{12}, & a_{22}b_{11}, & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21}, & a_{21}b_{22}, & a_{22}b_{21}, & a_{22}b_{22} \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} c_{11;11}, & c_{11;12}, & c_{11;21}, & c_{11;22} \\ c_{12;11}, & c_{12;12}, & c_{12;21}, & c_{12;22} \\ c_{21;11}, & c_{21;12}, & c_{21;21}, & c_{21;22} \\ c_{22;11}, & c_{22;12}, & c_{22;21}, & c_{22;22} \end{Vmatrix}$$

或者可同时将行和列作一个調換。

假設 A 和 B 都是对角矩陣

$$A=[\gamma_1, \cdots, \gamma_n];\ B=[\delta_1, \cdots, \delta_m]。$$

这种情形下，当 $i\neq k$, $j\neq l$ 时 $a_{ik}=0$, $b_{jl}=0$ 因此由于 (121) $c_{ij;kl}$ 仅当 (i, j) 与 (k, l) 重合时，$c_{ij;kl}$ 才不等于零，卽矩陣 C 也是对角的，它的对角綫上有所有可能的数 γ_k 与数 δ_l 的乘积。如果所有的 γ_k 及 δ_l 都等于 1，那么 C 也是单位矩陣。因此我們有下述定理。

定理 I. 两个对角矩陣的直接乘积是对角矩陣，两个单位矩陣的直接乘积是单位矩陣。

現在来証明下述定理

定理 II. 如果 $A^{(1)}$ 和 $A^{(2)}$ 是两个同阶矩陣而 $B^{(1)}$ 和 $B^{(2)}$ 也是两个同阶矩陣，那么下列公式成立：

$$(A^{(2)}\times B^{(2)})(A^{(1)}\times B^{(1)})=A^{(2)}A^{(1)}\times B^{(2)}B^{(1)}。\tag{123}$$

注意，当我們不用任何符号而写下两个同阶矩陣时，永远表示这两个矩陣的普通的乘积。用带有两个下标的对应的小写字母表示矩陣的元素，由直接乘积的定义，我們有：

$$\{A^{(t)}\times B^{(t)}\}_{ij;kl}=a_{ik}^{(t)}b_{jl}^{(t)}\quad (t=1, 2),$$

应用矩陣一般乘法的規則，对于等式 (123) 左边的元素，得到下述公式：

$$d_{ij;kl}=\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m}a_{ip}^{(2)}b_{jq}^{(2)}a_{pk}^{(1)}b_{ql}^{(1)}。\tag{124}$$

要說明，对于右边的元素也有同样的公式。根据一般乘法規則，我們有

$$\{A^{(2)}A^{(1)}\}_{ik}=\sum_{p=1}^{n}a_{ip}^{(2)}a_{pk}^{(1)};\ \{B^{(2)}B^{(1)}\}_{jl}=\sum_{q=1}^{m}b_{jq}^{(2)}b_{ql}^{(1)},$$

因此根据直接乘积的定义：

$$d_{ij;kl}=\sum_{p=1}^{n}a_{ip}^{(2)}a_{pk}^{(1)}\sum_{q=1}^{m}b_{jq}^{(2)}b_{ql}^{(1)},$$

这与(124)重合。現在來証明关于直接乘积的最后一个定理：

定理 III. 如果 A 和 B 是 U 矩陣，那么它們的直接乘积也是 U 矩陣。

根据定理的条件我們有：

$$\sum_{s=1}^{n} a_{sp}\bar{a}_{sq}=\delta_{pq};\quad \sum_{s=1}^{m} b_{sp}\bar{b}_{sq}=\delta_{pq}\text{。}\tag{125}$$

对于矩陣 C 根据列來驗明它的正交单位条件并按列表示成：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij;\,p_1q_1}\bar{c}_{ij;\,p_2q_2}=\delta_{p_1q_1;\,p_2q_2},$$

即，由于(121)：

$$\delta_{p_1q_1;\,p_2q_2}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ip_1}\bar{a}_{ip_2}b_{jq_1}\bar{b}_{jq_2}=\sum_{i=1}^{n} a_{ip_1}\bar{a}_{ip_2}\sum_{j=1}^{m} b_{jq_1}\bar{b}_{jq_2}\text{。}\tag{126}$$

由(125)，如果数对 $(p_1,\ q_1)$ 和 $(p_2,\ q_2)$ 不同，那么(126)右边的因子中至少有一个等于零，而如果这两对数重合，那么因子都等于1。因此，如果所提起的数对不重合，$\delta_{p_1q_1;\,p_2q_2}$ 等于零，如果这两对重合，就等于 1，这就証明了我們的定理。

显然，我們可以在两个矩陣的直接乘积上再乘（直接乘）上一个矩陣，因此而得到三个矩陣的直接乘积

$$A^{(1)}\times A^{(2)}\times A^{(3)}\text{。}$$

沿用前面的符号，我們可以用

$$c_{ikl;\,i'k'l'}=a_{ii'}^{(1)}a_{kk'}^{(2)}a_{ll'}^{(3)}$$

來表示新矩陣的元素。

用类似的方法可以組成任意有限个矩陣的直接乘积，而且乘积是一个矩陣，它的阶等于因子的阶的乘积。因子的次序沒有关系。

73. 群的两个綫性表示的合成 設有某一个元素为 G_α 的群 G 并假設这个群的两个綫性表示

$$x_i'=a_{i1}^{(\alpha)}x_1+\cdots+a_{in}^{(\alpha)}x_n\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\tag{127}$$

和

$$y'_k = b_{k1}^{(\alpha)} y_1 + \cdots + b_{km}^{(\alpha)} y_m \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \tag{128}$$

为已知，其中指标 α 取一个有限或无穷集合中的值。我們用 $A^{(\alpha)}$ 和 $B^{(\alpha)}$ 表示变换(127)及(128)的矩陣并組成它們的直接乘积

$$C^{(\alpha)} = A^{(\alpha)} \times B^{(\alpha)}。 \tag{129}$$

要証明，矩陣 $C^{(\alpha)}$ 也給出群 G 的一个綫性表示。事实上，群 G 的每一个元素 G_α 对应于矩陣 $C^{(\alpha)}$；乘积 $G_{\alpha_2} G_{\alpha_1} = G_{\alpha_3}$ 对应于矩陣 $C^{(\alpha_2)}C^{(\alpha_1)}$，由于(123)它由下公式决定

$$C^{(\alpha_2)}C^{(\alpha_1)} = (A^{(\alpha_2)} \times B^{(\alpha_2)})(A^{(\alpha_1)} \times B^{(\alpha_1)}) =$$
$$= (A^{(\alpha_2)}A^{(\alpha_1)}) \times (B^{(\alpha_2)}B^{(\alpha_1)})。$$

但因矩陣 $A^{(\alpha)}$ 和 $B^{(\alpha)}$ 給出群的綫性表示，故

$$A^{(\alpha_2)}A^{(\alpha_1)} = A^{(\alpha_3)} \text{且} B^{(\alpha_2)}B^{(\alpha_1)} = B^{(\alpha_3)},$$

因此：
$$C^{(\alpha_2)}C^{(\alpha_1)} = A^{(\alpha_3)} \times B^{(\alpha_3)},$$

卽由(129)：
$$C^{(\alpha_2)}C^{(\alpha_1)} = C^{(\alpha_3)}。$$

因此，元素 G_α 的乘积又对应于对应矩陣 $C^{(\alpha)}$ 的乘积，故这些矩陣給出群 G 的一个新的綫性表示。在此我們注意，G 的单位元素对应于单位矩陣 $A^{(\alpha)}$ 和 $B^{(\alpha)}$ 的直接乘积，卽单位矩陣 $C^{(\alpha)}$。

組成 nm 个乘积 $x_i y_k$ 并对每一个乘积作变换 (127) 及 (128)。我們就有：

$$x'_i y'_k = (a_{i1}^{(\alpha)} x_1 + \cdots + a_{in}^{(\alpha)} x_n) \cdot (b_{k1}^{(\alpha)} y_1 + \cdots + b_{km}^{(\alpha)} y_m),$$

或者，去括号得：

$$x'_i y'_k = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} c_{ik;\,pq}^{(\alpha)} x_p y_q,$$

其中
$$c_{ik;\,pq}^{(\alpha)} = a_{ip}^{(\alpha)} b_{kq}^{(\alpha)},$$

卽：如果 x_i 和 y_k 是由矩陣 $A^{(\alpha)}$ 和 $B^{(\alpha)}$ 所决定的綫性表示的对象，那么 $x_i y_k$ 是同一个群的由矩陣 $C^{(\alpha)}$ 所决定的綫性表示的对象。如果 $A^{(\alpha)}$ 和 $B^{(\alpha)}$ 給出不可約綫性表示，那么矩陣 $C^{(\alpha)}$ 不一定給出不

可約綫性表示。在以后我們将仔細地討論那种情形：群 G 是三維空間的轉动群，而 $A^{(\alpha)}$, $B^{(\alpha)}$ 是这个群的两个不同的不可約綫性表示，它們是我們在[69]中建立的。我們指明，在这种情形，乘积

$$D_{j1}\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}\times D_{j2}\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$$

是可約的，并且我們要判断，它可以由怎样的不可約表示所組成。

作为一个例子，我們来考虑原子核的正电場中两个电子的希呂丁格(Schrödinger)方程，这个方程的形式为：

$$\left[-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\sum_{s=1}^{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_s^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_s^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_s^2}\right)+V\right]\psi=E\psi, \tag{130}$$

其中

$$V=\sum_{s=1}^{2}-\frac{e^2e_0}{\sqrt{x_s^2+y_s^2+z_s^2}}+\frac{1}{2}\,\frac{e^2}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}}, \tag{131}$$

这里常数有通常的意义。在 V 的表式中的第二項在电子互相作用时发生。如果我們在第一近似值中忽略这种相互的作用，那么等式成为：

$$(H_1+H_2)\psi=E\psi, \tag{132}$$

其中　$$H_s=-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_s^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_s^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_s^2}\right)-\frac{e^2e_0}{\sqrt{x_s^2+y_s^2+z_s^2}}\qquad (s=1,\ 2)。$$

假設单独的方程：

$$H_1\psi=E\psi;\ \ H_2\psi=E\psi \tag{133}$$

有特征值 E_1 和 E_2 及对应的特征函数

$$\psi_1(x_1,\ y_1,\ z_1)\ \ 和\ \ \psi_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$$

即

$$H_1\psi_1=E_1\psi_1\ 和\ H_2\psi_2=E_2\psi_2。 \tag{134}$$

如果我們将　$\psi=\psi_1(x_1,\ y_1,\ z_1)\cdot\psi_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$

代入方程(132)，那么由于(134)，显然可得到

$$(H_1+H_2)\psi=\psi_2H_1\psi_1+\psi_1H_2\psi_2=(E_1+E_2)\psi_1\psi_2=(E_1+E_2)\psi,$$

即，方程(132)有特征函数 $\psi_1\psi_2$，它对应于特征值 (E_1+E_2)。方程(133)的左边包含拉普拉斯运算子和从原点到点的距离，因此，当我們施行三維空間圍繞原点的轉动时，左边保持不变。可以认为在方程(133)第一个中，特征值 $E=E_1$ 对应于某一些特征函数 ψ_1。所有这些函数是方程的解，給出轉动群的一个綫性表示，它們完全和[69]中的齐次多項式一样，給我們以轉动群的一个表示。假設这是表示 $D_{j1}\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$。同样地，对于已知的特征值 $E=E_2$，解(133)的第二个方程，将得到轉动群的某一个綫性表示。如上所示，乘积 $\psi_1\psi_2$ 給我們轉动群的一个綫性表示，它和直接乘积 $D_{j1}\times D_{j2}$ 重合，并且对于方程(132)的对应的特征值 (E_1+E_2) 的物理特性来說，把那些出現在其中的不

可約表示从这个表示中区分出来是重要的。这个情形在微扰論(Теории Возмущений，又譯作扰动論或攝动論)中很重要。

74. 群的直接乘积和它的綫性表示　矩陣的直接乘积在我們現在即将討論的另一个問題中也起着作用。假設有两个群 G 和 H，它們的元素用 G_α 和 H_β 来表示，而且指标 α 和 β 彼此独立地取值，一般来說，取值于不同的值的集合。定义一个新的群 F，它的元素被定义为 G 及 H 的元素对：

$$F_{\alpha\beta}=(G_\alpha,\ H_\beta)$$

而且其中第一个是 G 的元素，第二个是 H 的元素，当 G_α 和 H_β 分别是 G 和 H 的单位元素时，$F_{\alpha\beta}$ 称做是群 F 的单位元素，又用同样的方法定义群 F 中的逆元素。群 F 的乘法規則很自然地被下列公式所定义：

$$F_{\alpha_2\beta_2}F_{\alpha_1\beta_1}=(G_{\alpha_2}G_{\alpha_1},\ H_{\beta_2}H_{\beta_1})。$$

不难驗明，元素 $F_{\alpha\beta}$ 的全体确实組成一个群。这个群称做群 G 和 H 的直接乘积。設有群 G 的一个綫性表示，它被矩陣 $A^{(\alpha)}$ 所实現，又有群 H 的一个綫性表示，被矩陣 $B^{(\beta)}$ 所实現。应用公式(123)，和前节中可以一样地証明：直接乘积

$$C^{(\alpha,\beta)}=A^{(\alpha)}\times B^{(\beta)}$$

給出群 F 的一个綫性表示。此外，如果 $A^{(\alpha)}$ 和 $B^{(\beta)}$ 都是 U 表示，那么群 F 的表示 $C^{(\alpha,\beta)}$ 也是 U 表示 [72]。

現在来証明：如果表示 $A^{(\alpha)}$ 和 $B^{(\beta)}$ 都是不可約的，那么群 F 的表示 $C^{(\alpha,\beta)}$ 也是不可約的。假設矩陣 $A^{(\alpha)}$ 的阶是 n，矩陣 $B^{(\beta)}$ 的阶是 m。矩陣 $C^{(\alpha,\beta)}$ 的阶是 nm。設有某一个 nm 阶矩陣 X，它和所有的矩陣 $C^{(\alpha,\beta)}$ 都是可交换的。用对应的小写字母表示矩陣的元素。对于任意的指标 i, j, p, q，及对于任意的 α 及 β，我們有

$$\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} x_{ij;\,kl}\, a_{kp}^{(\alpha)} b_{lq}^{(\beta)} = \sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(\alpha)} b_{jl}^{(\beta)} x_{kl;\,pq}, \tag{135}$$

其中 $a_{kp}^{(\alpha)} b_{lq}^{(\beta)} = c_{kl;\,pq}^{(\alpha,\beta)},\quad a_{ik}^{(\alpha)} b_{jl}^{(\beta)} = c_{ij;\,kl}^{(\alpha,\beta)}$。

如果我們假設 $G^{(\alpha)}$ 是群 G 的单位元素，那么 $A^{(\alpha)}$ 是单位矩陣，即当 $k\neq p$, $a_{kp}^{(\alpha)}=0$, 而 $a_{pp}^{(\alpha)}=1$, 公式(135)就給我們:

$$\sum_{l=1}^{m} x_{ij;\,pl}\, b_{lq}^{(\beta)} = \sum_{l=1}^{m} b_{jl}^{(\beta)} x_{il,\,pq}, \tag{136}$$

并且，如果假設 $B^{(\beta)}$ 是群 B 的单位元素，那么同样地有:

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ij;\,kq}\, a_{kp}^{(\alpha)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(\alpha)} x_{kj;\,pq}。 \tag{137}$$

如果我們取 $(nm)^2$ 个元素 $x_{ij;\,kl}$ 并固定指标 i 和 k, 那么就得到 m^2 个元素

$$x_{ij;\,kl} \quad (j,\ l=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

它們給出某一个 m 阶矩陣。用 $X_1^{(i,k)}$ 表示这个矩陣。在 $x_{ij;kl}$ 中固定指标 j 和 l, 就得到一个 n 阶矩陣 $X_2^{(j,l)}$。由于 (136), 矩陣 $X_1^{(i,k)}$全体都和矩陣 $B^{(\beta)}$ 全体是可交換的，$B^{(\beta)}$ 是組成群 B 的不可約表示的，因此，矩陣 $X_1^{(i,k)}$ 都是单位矩陣的倍数，也就是說，对于固定的 i 和 k, 如果 $j=l$, 那么元素 $x_{ij;\,kl}$ 有相同的值，此外，如果 $j\neq l$, $x_{ij;kl}$ 就等于零。我們可以用下法来表示:

$$x_{ij;\,kl} = x_{i1;\,k1}\delta_{jl}。 \tag{138$_1$}$$

考虑矩陣 $X_2^{(j,l)}$ 我們就有:

$$x_{ij;\,kl} = x_{1j;\,1l}\,\delta_{ik}, \tag{138$_2$}$$

其中如通常一样

$$\delta_{pq}=0 \text{ 当 } p\neq \delta \text{ 而 } \delta_{pp}=1。$$

比較 (138_1) 和 (138_2) 推出，仅当 $i=k$ 和 $j=l$ 时，$x_{ij;\,kl}$ 才异于零，而且此时所有的数 $x_{ij;\,ij}$ 都是相等的，这就是說，与所有的矩陣 $C^{(\alpha,\beta)}$ 都是可交換的矩陣 X 必須是数量矩陣。由此可直接推出：由直接乘积 $A^{(\alpha)}\times B^{(\beta)}$ 所决定的群 F 的綫性表示是不可約的。可

以指明：用这种方法可以得到群 F 所有的不可約表示。

假設 G 和 H 是相同个数的变数的綫性变换群，并且假設任二个矩陣 G_α 和 H_β 都是成对地可交换的，即：

$$G_\alpha H_\beta = H_\beta G_\alpha。 \tag{139}$$

在上面的討論中我們认为群 F 的元素被定义为元素对 (G_α, H_β)，并且我們在群 F 內建立了确定的乘法規則，这个規則我們已經在上面写过了。在現在这个情形，我們可以认为群 F 的元素就是矩陣的乘积 (139)，这个乘积是与次序无关的。这个新的群 F 和原来的 F 是同构的①。如果 G_{α_0} 和 H_{β_0} 是单位矩陣，那么乘积 $G_{\alpha_0} H_{\beta_0} = H_{\beta_0} G_{\alpha_0}$ 也是单位矩陣。显然，矩陣 $G_\alpha^{-1} H_\beta^{-1} = H_\beta^{-1} G_\alpha^{-1}$ 是乘积 $G_\alpha H_\beta$ 的逆，并且，由于 (139) 我們有下述乘法規則：

$$G_{\alpha_2} H_{\beta_2} \cdot G_{\alpha_1} H_{\beta_1} = (G_{\alpha_2} G_{\alpha_1})(H_{\beta_2} H_{\beta_1})$$

这就是說，在上面建立群 F 时所提起的一切性质在現在仍被滿足，于是乘积 (139) 可以认为是群 F 的变元素。作为一个特例，我們取 G 是三維空間的轉动群，而 H 是由恒等变换 I 及对于原点的对称变换 S 所組成的二阶群 [57]。在这种情形，条件 (139) 是滿足的。如果 G_α 是空間的任意一个轉动，那么显然有 $G_\alpha S = S G_\alpha$。在这个情形群 F 是由三維空間的全部实正交变换所組成的群。对于群 H，我們有两个一阶綫性表示 [67]。一个是恒等表示，由数 $(+1)$ 所組成，另一个是反对称表示，其中矩陣 I 对应于 $(+1)$ 而矩陣 S 对应于 (-1)，如果現在我們取轉动群的某一个綫性表示 $D_j\{\alpha, \beta, \gamma\}$，那么我們可以取这个表示的矩陣和对于原点的对称变换群的两个表示的直接乘积。在一个情形我們得到整个正交变换群的綫性表示，在这个表示之下，每一个有尤拉角 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ 的轉动，不論是单純的轉动或者再添上一个对于原点的对称变换，

① 譯者注：这里需假定 G 和 H 除单位矩陣外，无其他公共元素，否则不一定同构。

都对应于同一个矩陣 $D_j\{\alpha, \beta, \gamma\}$。用 $D_j^+\{\alpha, \beta, \gamma\}$ 表示正交变換群的这个表示。在另一个情形，单純的轉动对应于矩陣 $D_j\{\alpha, \beta, \gamma\}$，而轉动和对称变换之积对应于矩陣 $-D_j\{\alpha, \beta, \gamma\}$。我們用 $D_j^-\{\alpha, \beta, \gamma\}$ 来表示正交变換群的这个表示。

再来考察一个两个群的直接乘积的例子。假設我們有两个点 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2)。假設群 G 是三維空間的轉动群。設我們的变数受到綫性变換：

$$
\begin{aligned}
x_k' &= g_{11}x_k + g_{12}y_k + g_{13}z_k \\
y_k' &= g_{21}x_k + g_{22}y_k + g_{23}z_k \quad (k=1, 2) \\
z_k' &= g_{31}x_k + g_{32}y_k + g_{33}z_k
\end{aligned}
\tag{140}
$$

其中表 g_{ik} 是某一个轉动的矩陣。再設群 H 由两个变換組成，一个是恒等变換，另一个变換則对应于点的編号 1，2 的对換。这后一个变換为：

$$
S = \begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 2, & 1 \end{pmatrix}。\tag{141}
$$

显然我們有 $S^2=I$，因此群 H 由两个变換 I 和 S 所組成。如果 G_α 是某一个轉动，那么显然 $G_\alpha S=SG_\alpha$，因为不論是在轉动之前后将点的編号改变都是一样的。在这个情形，我們得到和上面相同的群 F 的綫性表示。如果我們取 n 个点，那么由改变这些点的編号所組成的群 H 的元素是 n 个变数的变換，并且 H 和 n 个元素的置換群同构。在这个情形，轉动和点的編号的置換仍旧是可交換的，并且，取轉动群的綫性表示的矩陣和置換群的某一个綫性表示的矩陣的直接乘积，我們得到群 F 的一个綫性表示。

75. 轉动群的綫性表示的合成 $D_j \times D_{j'}$ 的分解 現在我們回到[**73**]所說到的事情。在那里我們看到，如果我們考虑两个电子的希呂丁格方程，并且不考虑电子的相互作用，那么希呂丁格方程的特征函数将給我們轉动群的一个綫性表示，是用轉动群的两个綫

性表示合成的。上节的結果告訴我們，将这样的表示分解为不可約部分是非常重要的。在这一节中我們就要討論这个問題。这問題从数学上可用下法叙述。設有轉动群的两个不可約表示 $D_j\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$ 和 $D_{j'}\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$，組成它們的合成 $D_j\times D_{j'}$，这也給出轉动群的一个綫性表示[73]。現在要分解出組成这个合成綫性表示的不可約部分。

$2j+1$ 阶綫性表示 D_j 的对象是量

$$U_m=\frac{u_1^{j+m}u_2^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}\ (m=-j,\ -j+1,\ \cdots,\ j-1,\ j) \tag{142}$$

而綫性表示 $D_{j'}$ 的对象是量

$$V_{m'}=\frac{v_1^{j'+m'}v_2^{j'-m'}}{\sqrt{(j'+m')!(j'-m')!}}\ (m'=-j',-j'+1,\cdots,j'-1,j') \tag{143}$$

这里 $(u_1,\ u_2)$ 和 $(v_1,\ v_2)$ 受到同一个矩陣为 $(+1)$ 的 U 变换[68]。如果我們組成 $(2j+1)(2j'+1)$ 个量：

$$W_{mm'}=U_mV_{m'}=\frac{u_1^{j+m}u_2^{j-m}v_1^{j'+m'}v_2^{j'-m'}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j'+m')!(j'-m')!}}, \tag{144}$$

$$\begin{pmatrix} m=-j,\ -j+1,\ \cdots,\ j-1,\ j \\ m'=-j',\ -j'+1,\ \cdots,\ j'-1,\ j' \end{pmatrix}$$

那么这些量是轉动群的那个由合成 $D_j\times D_{j'}$ 所决定的綫性表示的对象。

在下面我們将认为 j 和 j' 或者是整数，或者是整数的二分之一，即，严格地說，取行列式等于 1 的两个变数的 U 群的一个綫性表示。

設 k 是一个整数（或者是整数的二分之一），滿足不等式：

$$|j-j'|\leqslant k\leqslant j+j'。 \tag{145}$$

要来証明，我們可以由量(144)作成 $2k+1$ 个綫性組合，它們給出轉动群的綫性表示 D_k。

为了証明这个断言，我們作下述表示式：

$$L=(u_1v_2-u_2v_1)^l(u_1x_1+u_2x_2)^{2j-l}(v_1x_1+v_2x_2)^{2j'-l}, \quad (146)$$

其中 l 是某一个固定的整数，滿足下不等式：

$$l\geqslant 0;\ l\leqslant 2j;\ l\leqslant 2j'; \quad (147)$$

如果变数 (u_1, u_2) 和 (v_1, v_2) 經受同一个綫性变换

$$u_1'=a_{11}u_1+a_{12}u_2;\quad v_1'=a_{11}v_1+a_{12}v_2$$

$$u_2'=a_{21}u_1+a_{22}u_2;\quad v_2'=a_{21}v_1+a_{22}v_2$$

变换的行列式为 $(+1)$，即 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=1$，那么不难看出，(146)式中第一个因子保持不变。事实上，

$$u_1'v_2'-u_2'v_1'=(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})(u_1v_2-u_2v_1)。$$

(146) 式显然是 x_1 及 x_2 的 $2(j+j'-l)$ 次齐次多項式。因此它由下列形式的項所組成：

$$a_sx_1^sx_2^{2(j+j'-l)-s}\quad [s=0, 1, \cdots, 2(j+j'-l)]。$$

引进符号

$$k=j+j'-l \quad (148)$$

$$y_{m''}=\frac{x_1^{k+m''}x_2^{k-m''}}{\sqrt{(k+m'')!\,(k-m'')!}}$$

$$(m''=-k, -k+1, \cdots, k-1, k), \quad (149)$$

我們可以将(146)式写成：

$$L=\sum_{m''=-k}^{+k}c_{m''}y_{m''}。 \quad (150)$$

系数 $c_{m''}$ 依賴于变数 $(u_1, u_2)(v_1, v_2)$。

从(146)式直接推出：$c_{m''}$ 是 (u_1, u_2) 的 $2j$ 次齐次多項式且是 (v_1, v_2) 的 $2j'$ 次齐次多項式，即：$c_{m''}$ 由下列形式的項所組成：

$$a_{pq}'u_1^pu_2^{2j-p}v_1^qv_2^{2j'-q},$$

或者，应用(142)和(143)我們可以断言：$c_{m''}$ 是下列乘积的綫性組合：

$$c_{m''}=\sum_{m}\sum_{m'}d_{mm'}^{(m'')}U_mV_{m'}$$

$$(m''=-k,\ -k+1,\ \cdots,\ k-1,\ k),\qquad(151)$$

其中系数 $d_{mm'}^{(m'')}$ 不再包含 u_k 和 v_k。注意，在(146)式中变数 u_1 和 v_1 或者和 x_1 同时出現，或者包含在第一个因子中，而在第一个因子中 u_1 和 v_1 的次数之和为 l。再注意到 $y_{m''}$ 包含 $x_1^{k+m''}$，我們可以断言：在和(151)的項中，u_1 和 v_1 的指数之和是 $k+m''+l$，或者，由于(148)，这个指数和为 $j+j'+m''$。但是 U_m 包含 u_1^{j+m} 而 $V_{m'}$ 包含 $v_1^{j'+m'}$，故由此可直接推出：(151)式中每一个都只包含满足 $m+m'=m''$ 的乘积 $U_mV_{m'}$。現在我們可以指明：量 $U_mV_{m'}$ 的綫性組合(151)給出轉动群的一个綫性表示，此表示与 D_k 等价。

首先来提一下逆步变換的定义。如果有两个綫性变換

$$(x_1',\ \cdots,\ x_n')=A(x,\ \cdots,\ x_n)$$

和

$$(y_1',\ \cdots,\ y_n')=B(y_1,\ \cdots,\ y_n),$$

那么，为了满足等式

$$x_1'y_1'+\cdots+x_n'y_n'=x_1y_1+\cdots+x_ny_n$$

必要和充分条件是 B 和 A 是逆步的，即 $B=A^{(*)-1}$[見(**21**)和(**40**)]。

假設变数 $(u_1,\ u_2)$ 和 $(v_1,\ v_2)$ 同时受到一个行列式为 $(+1)$ 的 U 变換 A。假設在这个变換之下，变数 x_1 和 x_2 受到与 A 逆步的变換 $A^{(*)-1}$。从逆步变換的定义推出：在这个变換之下，和

$$u_1x_1+u_2x_2\ \text{及}\ v_1x_1+v_2x_2$$

保持不变。此外，就如我們在上面所示明的，在我們的变数的上述变換之下，(146)式中的第一个因子也保持不变。因此整个乘积 L 也保持不变，換句話說，即：由于(150)，变数 $c_{m''}$ 受到变換 B，这个变換与变数 $y_{m''}$ 所受到的变換 C 是逆步的。

引进新的变数

$$z_{m''}=\frac{u_1^{k+m''}u_2^{k-m''}}{\sqrt{(k+m'')!(k-m'')!}}$$

$$(m''=-k,\ -k+1,\ \cdots,\ k-1,\ k)。$$

应用牛顿二项公式，可以写成：

$$(u_1x_1+u_2x_2)^{2k}=(2k)!\sum_{m''=-k}^{+k}z_{m''}y_{m''}。$$

在我们的变换下，上面式子左边保持不变，因此，右边也该不变，即：变数 $z_{m''}$ 也受到同一个与 C 为逆步的变换 B，也就是变数 $c_{m''}$ 所受到的变换。但是我们知道，如果 $(u_1,\ u_2)$ 是行列式为 $(+1)$ 的 U 群的对象，那么变数 $z_{m''}$ 恰好给出转动群的线性表示 D_k。因此，我们的断言就被证明了。

将变数 (144) 解释作为 $(2j+1)(2j'+1)$ 维空间的矢量，我们可以由它们组成 $(2k+1)$ 个线性组合，这些组合给出转动群的线性表示 D_k。注意公式(148)和不等式(147)，我们就可看到：我们可以给 k 以下列的值：

$$k=j+j',\ j+j'-1,\ \cdots,\ |j-j'|。\tag{152}$$

现在来计算一下，我们一共组成了多少个量(144)的线性组合。为了清楚起见，假设 $j\geqslant j'$。我们提到的线性组合的个数是：

$$(2j+2j'+1)+(2j+2j'-1)+\cdots+(2j-2j'+1)。$$

这是一个算术级数的和，这个级数有

$$\frac{(2j+2j'+1)-(2j-2j'+1)}{2}+1=2j'+1$$

项，因此线性组合的总数是 $(2j+1)(2j'+1)$，即等于量(144)的个数。如果假设 $j<j'$，也可得到同样的结果。为了简单起见，假设

$$(2j+1)(2j'+1)=r,$$

用

$$w_1,\ w_2,\ \cdots,\ w_r\tag{153}$$

表示上面所说的量(144)的线性组合，并且我们认为这些线性组合

的次序是这样的：它們給出綫性表示 D_k，其中 k 的值是(152)。在变数 (u_1, u_2) 和 (v_1, v_2) 的某一个行列式为 $(+1)$ 的 U 变換的結果下，我們得到变数 (144) 的新的值 $U'_m V'_{m'}$ 及变数 (153) 的新的值 $w'_s (s=1, 2, \cdots, r)$，并且 w'_s 被 w_s 表示是根据一个准对角矩陣

$$[D_{j+j'}, D_{j+j'-1}, \cdots, D_{|j-j'|}], \tag{154}$$

而其中每一个 D_k 都对应于我們作用于 (u_1, u_2) 及 (v_1, v_2) 的那个 U 变換。下面我們将指明：量(144)的綫性型(153)是綫性无关的。設 T 是借以使 w_s 被变数 (144) 所表示的那个矩陣。直接乘积 $D_j \times D_{j'}$ 是变数(144)的綫性变換的矩陣，由上，我們有：

$$[D_{j+j'}, D_{j+j'-1}, \cdots, D_{|j-j'|}] = T(D_j \times D_{j'})T^{-1}, \tag{155}$$

这就把直接乘积分解成了不可約部分。上面的公式通常写成下述形式：

$$D_j \times D_{j'} = D_{j+j'} + D_{j+j'-1} + \cdots + D_{|j-j'|}。 \tag{156}$$

应該注意：每一个 D_k 被 U 变換所完全决定而且写成 $D_k\begin{Bmatrix} a, & b \\ -\bar{b}, & \bar{a} \end{Bmatrix}$。

上面的結果还可以推广到几个因子的情形。例如，我們可以写：

$$D_1 \times D_1 \times D_1 = (D_2 + D_1 + D_0) \times D_1 =$$
$$= D_3 + D_2 + D_1 + D_2 + D_1 + D_0 + D_1 =$$
$$= D_3 + 2D_2 + 3D_1 + D_0。$$

矩陣 D_1 本身是一个三阶矩陣[68]。直接乘积 $D_1 \times D_1$ 是九阶矩陣，而最后直接乘积 $D_1 \times D_1 \times D_1$ 是二十七阶矩陣。上面的公式說明：在任意选擇的 U 变換之下，这个矩陣与准对角矩陣

$$[D_3, D_2, D_2, D_1, D_1, D_1, D_0]$$

等价。

最后的这个矩陣的阶数等于[68]

$$(2.3+1) + 2(2.2+1) + 3(2.1+1) + (2.0+1) = 27。$$

現在来証明 w_s 的綫性无关性，w_s 看作是量(144)的綫性型。

在以前的表示中，量 w_s 就是量 $c_{m''}$，但只需注意：当建立 $c_{m''}$ 时，我們可以取不同的 k 的值，或者同样的，可以取不同的 l 的值，因之正确的是写成 $c_{m''}^{(l)}$。正如我們在前面看到的：每一个 $c_{m''}^{(l)}$ 只被满足 $m+m'=m''$ 的 $U_mV'_m$ 所表示。由此可直接推出：綫性无关性可以只从 l 是不同而 m'' 是相同的情形来証明。在(146)式中去掉最后两个括弧并合并項 $x_1^{k+m''}x_2^{k-m''}$，其中 k 由公式 (148) 所决定，除了相差一个常数因子外，我們得到以 u_k 和 v_k 表示 $c_{m''}^{(l)}$ 的式子。它們显然是 $(u_1v_2-u_2v_1)^l$ 乘上某一个正整数系数的 u_1, u_2, v_1, v_2 的多項式。不难看出，对于不同的 l，这些表示式不可能是綫性相关的。例如，假設我們有綫性关系：

$$\alpha_1c_{m''}^{(l_1)}+\alpha_2c_{m''}^{(l_2)}+\alpha_3c_{m''}^{(l_3)}=0,$$

其中 $l_1<l_2<l_3$ 而 α_k 是异于零的某一些常数。对于任何 u_1, u_2, v_1 和 v_2，我們所写的关系必須恒等地被满足。例如假設 $u_2=v_1=v_2=1$。由于上面提起的关于表示型 $c_{m''}^{(l)}$ 的性質，我們得到下列形式的关系：

$$\alpha_1(u_1-1)^{l_1}p_1(u_1)+\alpha_2(u_1-1)^{l_2}p_2(u_1)+\alpha_3(u_1-1)^{l_3}p_3(u_1)=0,$$

其中 $p_k(u_1)$ 是 u_1 的正整系数的多項式。在上述关系式中除以 $(u_1-1)^{l_1}$，然后，再令 $u_1=1$，得到 $\alpha_1=0$，这与上面所說的矛盾，因此証明了綫性相关的不可能性。

在(146)式中去括弧，我們自然就可以具体地得到以变数(144)表示的 w_s 的表示式。

76. 正交的性质 組成不等价的不可約 U 表示的矩陣具有某些性质，这些性质通常被称为正交性质。它們时常在将群論应用于物理时被用到。首先来叙述这个性质。

設有 m 阶有限群 G，它的元素是

$$G_1, G_2, \cdots, G_m$$

又設

$$A^{(1)}, \cdots, A^{(m)} \text{ 和 } B^{(1)}, \cdots, B^{(m)}$$

是給出群 G 的綫性表示的两組矩陣。用带有两个下标的小写字母表示这些矩陣的元素，并且认为所述两个綫性表示是不等价的不可約表示，且由 U 矩陣所組成，我們有

下列等式：

$$\sum_{s=1}^{m} a_{ij}^{(s)} \bar{b}_{kl}^{(s)} = 0, \tag{157}$$

对于任意的下标，这个等式都成立。对于一个不可約 U 变换类似的等式成立。設給出的不可約 U 表示的矩陣 $A^{(s)}$ 的阶是 p。下列公式成立：

$$\sum_{s=1}^{m} a_{ij}^{(s)} \bar{a}_{kl}^{(s)} = \frac{m}{p} \delta_{ik} \delta_{jl}, \tag{158}$$

即，左边的和当数对 (i, j) 和 (k, l) 不同时等于零，而当它們相同时等于 $\frac{m}{p}$。

正交性的証明是基于[66]的定理 III。首先提一下长方矩陣的乘法，設有两个矩陣 C 和 D，它們的元素分別是：

$$\{D\}_{ik}\begin{pmatrix} i=1, 2, \cdots, n_1 \\ k=1, 2, \cdots, n_2 \end{pmatrix} \text{ 和 } \{C\}_{jl}\begin{pmatrix} j=1, 2, \cdots, n_2 \\ l=1, 2, \cdots, n_3 \end{pmatrix},$$

而且矩陣 D 的列数 n_2 与矩陣 C 的行数相等。我們用通常的公式

$$\{DC\}_{ik} = \sum_{s=1}^{n_2} \{D\}_{is} \{C\}_{sk}$$

来定义乘积 DC 的元素。

現在来叙述基本定理。

定理 如果 p 阶 U 矩陣 $A^{(s)}$ 和 q 阶 U 矩陣 $B^{(s)}$ 給出群 G 的两个不等价的不可約表示，而某一个 p 行 q 列的矩陣 C 对任一个 s 都滿足条件：

$$A^{(s)}C = CB^{(s)} \quad (s=1, 2, \cdots, m), \tag{159}$$

则 C 为零矩陣，即它的每一个元素都等于零。

首先討論 $p=q$ 的情形，此时 C 也是一个方陣。如果 C 的行列式异于零，那么 C^{-1} 存在，且由(159)，有

$$A^{(s)} = CB^{(s)}C^{-1},$$

这就是說我們的两个表示是等价的，这与定理的条件矛盾。因此，C 的行列式必須等于零。假設 C 的元素不全为零，并用 c_{ik} 表示它的元素。显然，綫性型

$$c_{i1}x_1 + \cdots + c_{ip}x_p \quad (i=1, 2, \cdots, p)$$

对于任意的 x_s 决定一个子空間，这个子空間的維数等于 C 的秩[14]即，在这个情形，这个子空間的維数 $\geqslant 1$ 而 $<p$。換句話說，这个不是整个的 p 維子空間，而是某一个子空間 R。将(159)写作分量为 $(x_1, \cdots, x_p)$ 的矢量的某一个綫性变换：

$$A^{(s)}C(x_1, \cdots, x_p) = CB^{(s)}(x_1, \cdots, x_p) \quad (s=1, 2, \cdots, m)。$$

左边的 $C(x_1, \cdots, x_p)$ 是 R 中的任意矢量，而整个右边是綫性表示 C 作用在矢量 $B^{(s)}(x_1, \cdots, x_p)$ 上，也属于 R。換句話說，变换 $A^{(s)}$ 作用于 R 中的任一个矢量仍給出 R 中的矢量。在这个情形下，就如我們在[66]中所知道的，$A^{(s)}$ 給出可約表示，这与定理的条件相矛盾。

还需証明当 $p>q$ 时也对。在这个情形矩陣 C 的秩永远小于 p，因此綫性型

$$c_{i1}x_1+\cdots+c_{iq}x_q \quad (i=1, 2, \cdots, p)$$

在 p 維空間中央定某一个子空間 R，它的維数 $<p$，因此上面的証明仍然是正确的。最后假設 $p<q$，并在(159)中取轉置矩陣。这个給我們以

$$B^{(s)(*)}C^{(*)}=C^{(*)}A^{(s)(*)}。$$

在这个情形，矩陣 $B^{(s)(*)}$ 的阶 q 比矩陣 $A^{(s)(*)}$ 的阶 p 大，因此，由上所知，我們可以推出：U 矩陣 $B^{(s)(*)}$ 保持某一个子空間不变，因此我們可以适当地选擇基，化为准对角形。于是矩陣 $B^{(s)}$ 也化成了准对角形，这与定理的条件矛盾。因此定理就被証明了。

在定理的条件中，我們可以不提起 $A^{(s)}$ 和 $B^{(s)}$ 是 U 矩陣。如我們所知，化为相似矩陣后，我們永远可以认为 $A^{(s)}$ 和 $B^{(s)}$ 是 U 矩陣，而且化为相似变换后，在(159)中引进一个新矩陣 C_1 代替 C，它們之間的关系是：

$$C=D_1C_1D_2,$$

而 C_1 既然是零矩陣，那么 C 也是零矩陣。

現在来証明公式(157)。引进符号 $A(G_s)$ 和 $B(G_s)$ 来代替 $A^{(s)}$ 和 $B^{(s)}$，其中 G_s 是群 G 中对应于矩陣 $A^{(s)}$ 和 $B^{(s)}$ 的那一个元素。設 X 是有 p 行和 q 列的任意一个矩陣。引进矩陣

$$C=\sum_{s=1}^{m}A(G_s)XB(G_s)^{-1} \tag{160}$$

并来証明：它滿足关系式(159)。

設 G_t 是群 G 中某一个固定的元素，我們有：

$$A(G_t)C=\sum_{s=1}^{m}A(G_t)A(G_s)XB(G_s)^{-1}。$$

但是由綫性表示的定义

$$A(G_t)A(G_s)=A(G_tG_s) \text{ 和 } B(G_t)B(G_s)=B(G_tG_s),$$

由此推出
$$A(G_t)C=\sum_{s=1}^{m}A(G_tG_s)XB(G_tG_s)^{-1}B(G_t)。$$

如果 G_s 取过群的所有的元素，那么乘积 G_tG_s 也如此，因此，上述公式可写成下列形式：

$$A(G_t)C=CB(G_t),$$

即公式(160)所定义的矩陣 C，实际上是滿足关系式(159)的，因此，这个矩陣 C 是零矩陣。这样，对于任意选擇的 X，有：

$$\sum_{s=1}^{m}A(G_s)XB(G_s)^{-1}=0。$$

假設在矩陣 X 中某一个固定的元素 $\{X\}_{jl}$ 是 1，而其余的元素是零。于是上述公式給出：

$$\sum_{s=1}^{m}\{A(G_s)\}_{ij}\{B(G_s)^{-1}\}_{lk}=0_{\circ}$$

因为 $B(G_s)$ 是一个 U 矩陣，所以它可由 $B(G_s)^{-1}$ 行列互换并且将元素改为共軛元素而得到，所以上面的式子在以前的符号下可以写成：

$$\sum_{s=1}^{m}a_{ij}^{(s)}\bar{b}_{kl}^{(s)}=0,$$

这就是(157)。

同样地作矩陣

$$D=\sum_{s=1}^{m}A(G_s)XA(G_s)^{-1},$$

其中 X 是任一个 p 阶方陣。我們可以示明：

$$A(G_s)D=DA(G_s)\quad(s=1,2,\cdots,m)$$

并且由于[66]中的定理 III 可以断言：D 是数量矩陣，或者

$$\sum_{s=1}^{m}A(G_s)XA(G_s)^{-1}=cI,$$

其中数 c 依 X 的选择而改变。再假設 $\{X\}_{jl}=1$，而 X 的其余的元素等于零。并用 c_{jl} 表示对应的数 c。我們可以写下：

$$\sum_{s=1}^{m}\{A(G_s)\}_{ij}\{A(G_s)^{-1}\}_{lk}=c_{jl}\delta_{ik}{}_{\circ}\tag{161}$$

为了决定 c_{jl}，假設 $i=k$ 并令 i 从 1 到 p 而求和

$$pc_{jl}=\sum_{s=1}^{m}\sum_{i=1}^{p}\{A(G_s)^{-1}\}_{li}\{A(G_s)\}_{ij}=\sum_{s=1}^{m}\{I\}_{lj}{}_{\circ}$$

如果 $l=j$，那么右边等于 m，而当 $l\neq j$，它就等于零。由此，$c_{jl}=\frac{m}{p}\delta_{jl}$，因此，公式(161)可改写成：

$$\sum_{s=1}^{m}\{A(G_s)\}_{ij}\{A(G_s)^{-1}\}_{lk}=\frac{m}{p}\delta_{ik}\delta_{jl},\tag{162}$$

如果应用到 $A(G_s)$ 是 U 矩陣这一点，上式即与(158)重合。

不难看出，(157)式不但对于群的 U 表示成立，并且对于任意的不等价的不可約表示都成立。設 $A'(G_s)$ 和 $B'(G_s)$ 是这样的两个表示，它們的阶数分别是 p 和 q，而 $A(G_s)$ 和 $B(G_s)$ 是分别和它們等价的 U 表示，从而

$$A(G_s)=C_1A'(G_s)C_1^{-1};\quad B(G_s)=C_2B'(G_s)C_2^{-1},$$

其中 C_1 和 C_2 是与 s 无关的确定的矩陣。因为 $B(G_s)$ 是 U 矩陣，故有：

$$B(G_s)^{-1}=\overline{B(G_s)}^{*}=\overline{(C_2^{-1})}^{*}\overline{B'(G_s)}^{*}\overline{C}_2^{*},$$

而公式(157)可写为：

$$\sum_{s=1}^{m}C_1A'(G_s)C_1^{-1}X\overline{(C_2^{-1})}^{*}\overline{B'(G_t)}^{*}\overline{C}_2^{*}=0,$$

以 C_1^{-1} 左乘，以 $\overline{(C_2^{*})^{-1}}$ 右乘，并引进 p 行 q 列的任意矩陣 $Y=C_1^{-1}X\overline{(C_2^{-1})}^{*}$，就得

$$\sum_{s=1}^{m} A'(G_s) Y \overline{B'(G_s)}^* = 0$$

利用 Y 的任意性，与上面一样得到：

$$\sum_{s=1}^{m} a_{ij}^{(s)} \bar{b}_{kl}^{(s)} = 0_{\circ}$$

同样地可以注意：(162)式不只对于 U 表示，它对于任意的表示都成立，这个可以从它的証明和下述事实推出：在証明此定理时，不必要提起 $A^{(s)}$ 和 $B^{(s)}$ 是 U 矩陣。

77. 品格 和上面一样，假設 $A(G_s)$ 和 $B(G_s)$ 是群 G 的两个不等价的不可約表示，它們的阶分别是 p 和 q，而群 G 的元素是 $G_1, G_2, \cdots, G_m$。用 $X(G_s)$ 和 $X'(G_s)$ 表示这两个表示中的矩陣的迹，卽矩陣的主对角綫上的元素的和：

$$X(G_s) = \sum_{i=1}^{p} \{A(G_s)\}_{ii}; X'(G_s) = \sum_{k=1}^{q} \{B(G_s)\}_{kk\circ}$$

这些数被称做上述表示的品格。对于等价表示，它們的品格显然是相同的[27]，而且我們可以认为：所討論的表示是 U 表示。正交公式給出：

$$\sum_{s=1}^{m} \{A(G_s)\}_{ii} \{\overline{B(G_s)}\}_{kk} = 0,$$

对 i 和 k 求和，就得到品格的正交公式：

$$\sum_{s=1}^{m} X(G_s) \overline{X'(G_s)} = 0_{\circ} \tag{163}$$

同样地，(158)式給出：

$$\sum_{s=1}^{m} \{A(G_s)\}_{ii} \{\overline{A(G_s)\}_{kk}} = \frac{m}{p} \delta_{ik}$$

对 i 和 k 求和，就得到

$$\sum_{s=1}^{m} X(G_s) \overline{X(G_s)} = m_{\circ} \tag{164}$$

应用这些公式，我們来証明一些定理。

定理 1. 两个不可約表示等价的充要条件是它們的品格都相同。

我們已經提起过，等价(可約的或不可約的)表示的品格是相同的，这是条件的必要性。現在假設：已知两个不可約表示的品格是相等的，卽

$$X(G_s) = X'(G_s) \quad (s = 1, 2, \cdots, m),$$

要証明这两个表示是等价的。由于(164)，有：

$$\sum_{s=1}^{m} X(G_s) \overline{X'(G_s)} = m,$$

由此推出表示的等价性，因为如果它們不是等价的，那么我們必須有等式(163)，注意，等价表示的矩陣显然必須是同阶的。对应于每一个不可約表示，在 m 維复空間 R_m 中引进分量为

$$\frac{1}{\sqrt{m}} X(G_1), \frac{1}{\sqrt{m}} X(G_2), \cdots, \frac{1}{\sqrt{m}} X(G_m)$$

的矢量。由于 (164)，这些矢量是单位的，并且由于 (163)，对应于不等价的表示的矢量是互相正交的。由此推出：阶为 m 的群 G 的不等价的不可约表示不可能多于 m 个。在以后我们要确定一个群的不等价的不可约表示的个数。暂时我们用字母 l 来表示这个数目。设 $\omega^{(i)}(i=1, 2, \cdots, l)$ 是这些不等价不可约表示而

$$X^{(i)}(G_1),\ X^{(i)}(G_2),\ \cdots,\ X^{(i)}(G_m) \quad (i=1, 2, \cdots, l)$$

是这些表示的品格。设有某一个表示 ω 的品格为：

$$X(G_1),\ X(G_2),\ \cdots,\ X(G_m)。$$

由于表示 ω 是可约的结果，它被准对角矩阵所表示，这些准对角矩阵由表示 $\omega^{(i)}$ 的矩阵所组成。因此对于品格，我们有

$$X(G_s)=\sum_{i=1}^{l} a_i X^{(i)}(G_s), \tag{165}$$

其中 a_i 是不小于零的整数，它们表示在表示 ω 化为已约表示后 $\omega^{(i)}$ 在其中出现的次数。

根据表示 ω 的品格，可以指出决定系数 a_i 的公式。设 k 是数 1, 2, …, l 中的一个。用 $\overline{X^{(k)}(G_s)}$ 乘(165)的两边并对 s 求和。应用(163)和(164)，得到，

$$\sum_{s=1}^{m} X(G_s)\overline{X^{(k)}(G_s)} = a_k m,$$

由此

$$a_k=\frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m} X(G_s)\,\overline{X^{(k)}(G_s)}。 \tag{166}$$

这个公式对于每一个 a_k 给出一个确定的值，由此推出下述定理。

定理 2. 每一个可约表示都可分解为唯一的不可约表示的集合。

利用(166)式不难把定理 I 推广到任意表示的情形，不只是对于不可约表示。

定理 3. 两个表示等价的必要充分条件是它们的品格相等。

条件的必要性在证明定理 1 时已经看出。反之，如果两个表示的品格 $X(G_s)$ 相重，那么由于(166)式我们得到数 a_k 的相同的值，因此两个表示都化为由相同的不可约表示组成的准对角矩阵。于是，如果必要的话，将它们化为等价表示后，可以认为所说到的不可约表示在准对角矩阵中位于相同的次序，因为将它同时对换行列所得的矩阵是等价的。

因此那些具有相同的品格的表示可化为同一个准对角矩阵，也就是说，它们是等价的。

现在来讨论群 G 所有的不等价的不可约表示的个数 l，这个群的元素被分为类。在同一个类中全部的元素可由类中一个元素 G_t 按照下公式而得到：

$$G_s G_t G_s^{-1} \quad (s=1, 2, \cdots, m)。$$

在任一个表示中所有这些元素对应于具有同一个迹的相似矩阵。设 r 是群 G 的类的个数。由上所示，群 G 的任一个线性表示的品格中不可能有多于 r 个相异的数

值，而且品格的每一个值不只是对应于个别的元素而是对应于属于某一个类的所有的元素。设类 C_1 由 g_1 个元素组成，C_2 由 g_2 个元素组成，等等，最后，类 C_n 有 g_n 个元素。和(163)中的项对于同一类中的元素是相同的，我们用 $X(C_k)$，$X'(C_k)$ 表示对应于类 C_k 中的元素的品格，对于两个不等价的不可约表示，可以将(163)改写成：

$$\sum_{k=1}^{r} X(C_k)\,\overline{X'(C_k)}\,g_k=0$$

而将(164)改写成：

$$\sum_{k=1}^{r} X(C_k)\,\overline{X(C_k)}\,g_k=m。$$

因此，对于不等价的不可约表示 $\omega^{(i)}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ l)$ 的品格 $X^{(i)}(C_k)$，我们有：

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{r} X^{(i_1)}(C_k)\overline{X^{(i_2)}(C_k)}g_k=0\\&\sum_{k=1}^{r} X^{(i)}(C_k)\,\overline{X^{(i)}(C_k)}g_k=m。\end{aligned}\right\}\ \text{当}\, i_1\neq i_2 \tag{167}$$

在 r 维空间 R_r 中，引进 l 个矢量，它们的分量为：

$$\sqrt{\frac{g_1}{m}}X^{(i)}(C_1),\ \sqrt{\frac{g_2}{m}}X^{(i)}(C_2),\ \cdots,\ \sqrt{\frac{g_r}{m}}X^{(i)}(C_r)\,(i=1,\ 2,\ \cdots,\ l)。$$

前面的等式说明：这些矢量成对地正交且是单位的，因此是线性无关的。由此推出，它们的个数 l 不超过维数，即 $l\geqslant r$。我们得到定理。

定理 4. 一个群的不等价的不可约表示的个数不超过群的类的个数。

下一节中我们要证明 $l=r$。既然我们证明了 $l\leqslant r$，那么为了证明等式 $l=r$，我们只要证明不等式 $l\geqslant r$。这个不等式的证明与某一些新的概念和品格间的关系相联系着，而这些东西本身也是很有兴趣的。

再来建立任意的不可约表示的品格之间的一个关系。假设类 C_k 由元素 $G_1^{(k)}$，$G_2^{(k)}$，$\cdots$，$G_{g_k}^{(k)}$ 所组成。如果 G_s 是群中的任意一个元素，那么元素 $G_sG_i^{(k)}G_s^{-1}$ 又重新给出类 C_k 中所有的元素，但是已经是另一个次序了。由此推出，如果我们取某两个类 C_p 和 C_q 中的元素的所有乘积

$$G_u^{(p)}G_v^{(q)}\quad(u=1,\ 2,\ \cdots,\ g_p;\, v=1,\ 2,\ \cdots,\ g_q) \tag{168}$$

的集合，那么元素

$$G_sG_u^{(p)}G_v^{(q)}G_s^{-1}=(G_sG_u^{(p)}G_s^{-1})\,(G_sG_v^{(q)}G_s^{-1})$$

的全体仍将是原来的那个集合。由此推出，元素(168)的集合具有这样的性质：如果某一个元素属于这个集合，那么包含这个元素的类整个都属于这个集合，而且类中的元素在这个元素(168)的集合中出现的次数相同。用不小于零的整数 a_{pqk} 表示类 C_k 中的元素在元素(168)的集合中出现的次数。我们可以用另一种方法来表示：

$$C_pC_q=\sum_{k=1}^{r} a_{pqk}C_k \tag{169}$$

或

$$(G_1^{(p)}+G_2^{(p)}+\cdots+G_{g_p}^{(p)})\ (G_1^{(q)}+G_2^{(q)}+\cdots+G_{g_q}^{(q)})=$$

$$=\sum_{k=1}^{r}a_{pqk}\ (G_1^{(k)}+G_2^{(k)}+\cdots+G_{g_k}^{(k)})\ 。\tag{170}$$

设 $A(G_s)$ 是群 G 的某一个不可约线性表示的 n 阶矩阵。组成对应于类 C_k 的元素的矩阵的和，并用 $A(C_k)$ 表示这个矩阵:

$$A(C_k)=\sum_{j=1}^{g_k}A(G_j^{(k)})\ 。$$

注意到当 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ g_k$，对 G 中任一元素 G_s，元素 $G_sG_i^{(k)}G_s^{-1}$给出类 C_k 中的元素的整个集合，我们看出，矩阵 $A(C_k)$ 和所有的矩阵 $A(G_s)$ 都是可交换的。由此推出，这个矩阵 $A(C_k)$ 是数字矩阵 [66]，于是我们可以写成:

$$A(C_k)=b_kI\quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ r),\tag{171}$$

其中 b_k 是某一个数。注意到数 a_{pqk} 的定义，即符号公式(170)，我们得到数 b_k 之间的下述关系:

$$b_pb_q=\sum_{k=1}^{r}a_{pqk}b_k\ 。\tag{172}$$

矩阵 $A(C_k)$ 的迹等于矩阵 $A(G_i^{(k)})$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ g_k)$ 的迹之和，即等于 $g_kX(C_k)$。另一方面，从 (171) 推出: $A(C_k)$ 的迹等于 nb_k，即 $nb_k=g_kX(C_k)$，于是

$$b_k=\frac{g_k}{n}X(C_k),$$

而 (172) 式使我们得到下述定理。

定理 5. 在由 n 阶矩阵所组成的任一个不可约表示的品格之间，下述关系成立:

$$g_pX(C_p)g_qX(C_q)=n\sum_{k=1}^{r}a_{pqk}g_kX(C_k)\ 。\tag{173}$$

注意，在类 C_k 之中，有只有群 G 的单位元素 E 所组成的类。在任一个线性表示中，它对应于单位矩阵，这个矩阵的迹等于它的阶n。我们永远用 C_1 来表示这个类，于是 $X(C_1)=n$，上面的公式可以写成:

$$g_pX(C_p)g_qX(C_q)=X(C_1)\sum_{k=1}^{r}a_{pqk}g_kX(C_k)\ 。\tag{174}$$

现在来决定常数 a_{pqk} 的值。每一个类 C_p 对应于一个类 $C_{p'}$，$C_{p'}$ 是由 C_p 中的元素的逆所组成的。这个可由类的定义和下述事实直接推出: 公式 $G_sG_tG_s^{-1}=G_u$ 给出公式 $G_sG_t^{-1}G_s^{-1}=G_u^{-1}$。

类 $C_{p'}$ 可能与 C_p 重合，即可能 $p'=p$。在任何情形下，类 C_p 和 $C_{p'}$ 包含相同数目的元素，即 $g_{p'}=g_p$。如果在公式(173)或(174)中取 $q=p'$，那么在右边类 C_1 将出现 g_p次，当 $q\neq p'$ 时，右边不包含 C_1，即:

$$a_{pq1}=\begin{cases}0 & 当\ q\neq p'\\ g_p & 当\ q=p'\ 。\end{cases}\tag{175}$$

78. 群的正则表示　我们已经说过借置换群来表示任意有限群的方法。我们可

以把每个置换群看成变换群。

实际上，如果有一个置换

$$\begin{matrix} 1, 2, 3, 4 \\ 2, 4, 3, 1, \end{matrix}$$

则它可以写成这样一个变换，它将 x_1, x_2, x_3 与 x_4 分别变到 y_2, y_4, y_3 与 y_1

$$\begin{aligned} y_1 &= 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4 \\ y_2 &= x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ y_3 &= 0x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 \\ y_4 &= 0x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4。 \end{aligned}$$

我们来考察群 G 的如下的表示，即用元素 G_s 右乘群 G 的诸元素 G_1, G_2, $\cdots$, G_m 所得到的置换群，这个表示使 G 的元素与元素的某些置换对应，根据上面的说法，就是说，它与某些矩阵 P_s 对应，这个表示通常叫做群 G 的正则表示。我们通常用 E 来表示群 G 的单位元素，单位矩阵 P_s 就对应于这个元素，因此，这个矩阵的迹等于 m，即 $X(E)=m$。当用任意一个非单位元素 G_s 乘元素 G_1, G_2, $\cdots$, G_m 时，没有一个元素是保持不动的，就是说，在对应的矩阵内所有对角线上元素皆等于零，因而在正则表示中当 $G_s \neq E$ 时 $X(G_s)=0$。

假设在正则表示中前面谈到的不等价不可约表示 $\omega^{(k)}$ 出现 h_k 次。于是，根据上面所说的，我们有

$$\sum_{t=1}^{l} h_t X^{(t)}(G_s) = \begin{cases} 0 & 当\ G_s \neq E \\ m & 当\ G_s = E。 \end{cases} \tag{176}$$

将此方程两端乘以 $\overline{X^{(k)}(G_s)}$ 而且对 s 求和，根据 (163) 及 (164)，我们得到

$$h_k m = m\overline{X^{(k)}(E)},$$

但是 $X^{(k)}(E)$ 等于表示 $\omega^{(k)}$ 中矩阵的阶，我们用 n_k 来表示这个阶，于是

$$X^{(k)}(E) = \overline{X^{(k)}(E)} = h_k,$$

从而 $h_k = n_k$，而且公式(176)可以换写成

$$\sum_{t=1}^{l} X^{(t)}(E) X^{(t)}(G_s) = \sum_{t=1}^{l} n_t X^{(t)}(G_s) = \begin{cases} 0 & 当\ G_s \neq E \\ m & 当\ G_s = E。 \end{cases} \tag{177}$$

所以我们得到下面的定理。

定理 6. 在已约的正则表示中每个不可约表示 $\omega^{(k)}$ 的重复次数等于在该表示 $\omega^{(k)}$ 中矩阵的阶，而且对于表示 $\omega^{(k)}$ 的品格，公式(177)成立。

对于表示 $\omega^{(k)}$，公式(174)为

$$g_p X^{(t)}(C_p) g_q X^{(t)}(C_q) = X^{(t)}(C_1) \sum_{k=1}^{r} a_{pqk} g_k X^{(t)}(C_k),$$

对 t 从 $t=1$ 到 $t=l$ 求和:

$$g_p g_q \sum_{t=1}^{l} X^{(t)}(C_p) X^{(t)}(C_q) = \sum_{k=1}^{r} a_{pqk} \sum_{t=1}^{l} X^{(t)}(C_1) g_k X^{(t)}(C_k)。$$

根据(177)，得到

$$g_p g_q \sum_{t=1}^{l} X^{(t)}(C_p) X^{(t)}(C_q) = a_{pq1} m,$$

就是说，由于(175)，

$$\sum_{t=1}^{l} X^{(t)}(C_p) X^{(t)}(C_q) = \begin{cases} 0 & 当\ q \neq p' \\ \dfrac{m}{g_{p'}} & 当\ q = p'。\end{cases} \tag{178}$$

作 l 个关于 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 的线性齐次方程

$$\sum_{q=1}^{r} x_q X^{(k)}(C_q) = 0 \quad (k=1, 2, \cdots, l) \tag{179}$$

我们来证明它只有零解，

实际上，用 $X^{(k)}(C_p)$ 乘 (179) 的两端而且对 k 求和，即得 $x_{p'}=0$ 而且 p' 可以取从 1 到 r 的任何数。因为方程组(179)只有零解，这方程组中的方程的个数不能小于未知数的个数，即 $l \geqslant r$。以前我们曾经证明过 $l \leqslant r$，由是推得 $l=r$，即

定理 7. 一个有限群 G 的所有不等价的不可约表示的个数等于该群的类数。

我们还要来说明定理 6 的一个推论，群 G 的正则表示系由 m 阶矩阵所组成。另一方面，由于定理 6 它包含每个表示 $\omega^{(k)}$ n_k 次而每个表示 $\omega^{(k)}$ 恰好由 n_k 阶矩阵所组成。

由是推得等式

$$\sum_{k=1}^{r} n_k^2 = m, \tag{180}$$

这个等式可以表述如下:

定理 8. 所有不等价的不可约的表示 $\omega^{(k)}$ 的阶的平方和等于群 G 的阶。

79. 有限群表示举例 1. 我们来看由下列元素作成的阿倍尔群 $G: A_2^k A_1^i$，其中 $i=0, 1, 2, \cdots, m-1$; $k=0, 1, 2, \cdots, n-1$，而且元素 A_1 与 A_2 可交换，$A_1^m=E$; $A_2^n=E$，当 $i=k=0$ 时必须认为 $A_2^0 A_1^0=E$。G 的每个单独元素作成一类而且所有不可约的群表示都是一阶的。假设 α 与 β 分别为任意两个 m 与 n 次单位根。如果我们把数 $\beta^k \alpha^i$ 与元素 $A_2^k A_1^i$ 对应起来，则易知我们因此得到一个群表示。让 α 和 β 分别取上述单位根的所有可能的值，于是得到所有 mn 个不同的一阶表示。群 G 的类(即元素)的总数也等于 mn，因而所有不等价的不可约表示正是上述的那些表示。当群 G 的"生成元素"(即元素 A_s)多于两个时，我们仍然可用上述方法作出它的一切表示来。

2. 现在来看 n 边的两面体群，它由下列 $2n$ 个元素所组成:

$$E, A^i, T, TA^i \quad (i=1, 2, \cdots, n-1)$$

这里

$$A^n=E;\ T^2=E;\ TAT^{-1}=A^{-1}\ (T^{-1}=T)。\tag{181}$$

这些关系中的最后一个直接从转动 A 与 T 的几何意义来看是显然的。从这些关系直

接推出关系 $TA^iT^{-1}=A^{-i}$。首先假设 $n=2m+1$ 为奇数。此时群由$(m+2)$ 个类所组成。其中之一为 E，有 m 个类其中每类只包含两个元素 A^s 与 A^{-s} $(s=1, 2, \cdots, m)$，这里 $A^{-s}=A^{2m+1-s}$，而另一类包含所有的下列元素 T 与 $TA^i(i=1, 2, \cdots, n-1)$，所有这一切都不难根据上述关系验证。

这群有两个一阶表示。其中之一为每个元素皆与 1 对应。而另一为元素 A 与 1 对应而元素 T 与 (-1) 对应，其次令 $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$。$m$ 个二阶表示可如下作出：令

$$A\to\begin{Vmatrix}\varepsilon^s, & 0\\ 0, & \varepsilon^{-s}\end{Vmatrix};\quad T\to\begin{Vmatrix}0, & 1\\ 1, & 0\end{Vmatrix}\quad (s=1, 2, \cdots, m)。\tag{182}$$

这些矩阵满足关系 (181)，因而可以推知(182)确为群表示，这是因为元素 A 与 T 之间的每个关系都是关系(181)的结果。这 m 个表示的不可约性可以如下推知，假如不然，这些表示都将化成两个一阶表示，因而对应于 A 与 T 的矩阵非交换不可，我们容易看到这是决不可能的。

对于不同的 s 表示(182)是互不等价的。证明如下：对于不同的 s，对应于元素 A 的矩阵有不同的特征值 ε^s 与 ε^{-s}。所以我们得到了所有的不等价的不可约的表示。公式(180)在目前的情形就是

$$2\times1^2+m\times2^2=4m+2=2n。$$

对于偶数 $n=2m$，与 $s=m$ 相当的表示(182)取下面的形式：

$$A\to\begin{Vmatrix}-1, & 0\\ 0, & -1\end{Vmatrix};\quad T\to\begin{Vmatrix}0, & 1\\ 1, & 0\end{Vmatrix}$$

它可分解成两个一阶表示：

$$A\to(-1);T\to(+1)\text{以及 }A\to(-1);T\to(-1)。$$

为此我们只需利用这样一个矩阵 S，使得 STS^{-1} 化成对角线形式，这里 T 的特征值显然等于 ±1。因此，当 $n=2m$ 时，群有四个一阶表示以及$(m-1)$个二阶表示。公式 (180) 此时取下列形式：

$$4\times1^2+(m-1)\times2^2=4m=2n。$$

3．我们来考察四面体群，也就等于来考察与它同构的在[**59**]内 $n=4$ 的交替群。此群由四个类组成而且它的阶为 12。因而它必须有四个不等价的不可约表示。这些表示的阶必须满足下列等式：

$$n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_4^2=12。$$

如果不计及等式左端各项的次序，这个方程在正整数的范围内只有一解，即

$$n_1=n_2=n_3=1;\ n_4=3,$$

就是说，我们的群具有三个一阶表示与一个三阶表示。在这些一阶表示中，属于同一类的各元素对应于同一个数，不难证明，在这三个一阶表示中对应于每类的数如下：

$$I\to 1;\quad II\to 1;\quad III\to 1;\quad IV\to 1$$
$$I\to 1;\quad II\to 1;\quad III\to \varepsilon;\quad IV\to \varepsilon^2$$
$$I\to 1;\quad II\to 1;\quad III\to \varepsilon^2;\quad IV\to \varepsilon,$$

其中
$$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}。$$

四面体群本身就提供了不可約的三阶表示，就是說，所有使四面体变到其自身的空間轉动(相当于三阶矩陣)群，假如这个表示是可約的，則它必須化成三个一阶表示，由于四面体群不是阿倍尔群，这种化法是决不可能的。在上节中所闡明的理論只涉及到有限群，为了把这种理論搬到轉动群去，我們必須更詳細地来研究依賴于参变数的无限群。在对于这种群作一般的研究以前，我們来闡明关于劳倫次群的綫性表示的問題。与轉动群的表示一样，这种表示可作为我們对依賴于参变数的无限群的研究的基本例子。

80. 两个变数的綫性群的表示 在[68]中我們曾作得二变数 U 群的綫性表示，它使我們获得轉动群的綫性表示。同样，我們可以来作行列式为 1 的二变数綫性群的表示：

$$\left.\begin{aligned}x_1'&=ax_1+bx_2\\x_2'&=cx_1+dx_2\end{aligned}\right\}\ ad-bc=1。\tag{183}$$

根据在[64]中所說的結果，这使我們获得正劳倫次变換群的单值和二値表示。这种結果却基本上不同于[68]中的結果。

U 群(93)的可能綫性表示之一就是这个群本身作成的表示，就是使得对应于每个变換(93)的就是这个变換自身。容易見到，另一个綫性表示如下：用下列具有复数共軛系数的变換对应于每个变換(93)：

$$\left.\begin{aligned}y_1'&=\bar{a}y_1+\bar{b}y_2,\\y_2'&=-by_1+ay_2。\end{aligned}\right\}$$

但是这个表示与上述的表示等价，这可由下面容易驗算的公式直接推得：

$$\begin{Vmatrix}0, & 1\\-1, & 0\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}a, & b\\-\bar{b}, & \bar{a}\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\bar{a}, & \bar{b}\\-b, & a\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}0, & 1\\-1, & 0\end{Vmatrix}。$$

然而对于群(183)共軛表示

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= \bar{a}y_1+\bar{b}y_2 \\ y_2' &= \bar{c}y_1+\bar{d}y_2 \end{aligned}\right\} \tag{184}$$

与群(183)本身是不等价的，为了証明这一点，只要看 $b=c=0$ 的情形，此时变换(183)的矩陣的特征值为 a 与 d，而(184)的矩陣的特征值为 $\bar{a}$ 与 $\bar{d}$。显然，我們可以如此选擇满足条件 $ad=1$ 的复数 a 与 d，使得 $\bar{a}$ 与 $\bar{d}$ 这对数不同于 a 与 d 这对数，因而互相对应的变换决不可能相似。因此，在現在情形下，我們已經得到两个不等价的二阶表示——群(183)本身与群(184)。以后再来談这两个表示的不可約性。

其次，完全与在[68]中曾經作过的一样，我們可以作出群(183)的表示，在公式(99)中我們只需将 $\bar{a}$ 換成 d，$\bar{b}$ 換成 $(-c)$，这就使我們获得下列的 $(2j+1)$ 阶的表示，其中 j 为非負整数或为分母为 2，分子为奇数的分数：

$$D_j\begin{Bmatrix} a, & b \\ c, & d \end{Bmatrix}_{ls} = \sum_k \frac{\sqrt{(j+l)!\,(j-l)!\,(j+s)!\,(j-s)!}}{k!\,(j-k-s)!\,(j+l-k)!\,(k+s-l)!} \times$$
$$\times a^{j+l-k} b^k c^{k+s-l} d^{j-k-s} \quad \left(j=0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ \cdots\right)。 \tag{185}$$

这里的 l 与 s 取下列的値

$$l \text{ 与 } s=-j,\ -j+1,\ \cdots,\ j-1,\ j,$$

而上面和号下的 k 須满足不等式

$$k\geqslant 0;\ k\geqslant l-s;\ k\leqslant j-s;\ k\leqslant j+l。$$

在公式(185)中应当看作 $0!=1$ 与 $0^0=1$。当 $j=0$ 时我們得到恒等表示 1，除了表示(185)以外，我們可以直接写出其他的表示，这种表示系在(185)的右端将 a, b, c 与 d 換成它們的共軛数而得到，我們用下列記号来表达与之相当的表示：

$$\bar{D}_{j'}\begin{Bmatrix} a, & b \\ c, & d \end{Bmatrix} \quad \left(j'=0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ \cdots\right)。 \tag{186}$$

現在我們可以来作表示(185)与(186)的合成[73]，由此得到新的

$(2j+1)(2j'+1)$阶的表示。这种表示我們用下面記号来表它：

$$E_{j,j'}\begin{Bmatrix}a, & b\\ c, & d\end{Bmatrix}。\tag{187}$$

应用公式(185)容易定出这个表示中矩陣的元素。在(187)中取定两个不同的表示，但是使得它們有相等的阶：

$$E_{p,q}\begin{Bmatrix}a, & b\\ c, & d\end{Bmatrix} 与 \ E_{p_1,q_1}\begin{Bmatrix}a, & b\\ c, & d\end{Bmatrix},$$

$$(2p+1)(2q+1)=(2p_1+1)(2q_1+1)。$$

我們来証明，这两个表示是不等价的，假設 $b=c=0$。于是，矩陣(185)化成对角形矩陣，其对角綫上元素为

$$D_j\begin{Bmatrix}a, & 0\\ 0, & d\end{Bmatrix}_{ll}=a^{j+l}d^{j-l} \qquad (l=-j, -j+1, \cdots, j-1, j),$$

两个对角形矩陣的直接乘积仍是对角形矩陣，因而矩陣 $E_{p,q}$ 与 E_{p_1,q_1} 当 $b=c=0$ 具有下列的特征值：

$$E_{p,q}: a^{p+l}d^{p-l}(\overline{a})^{q+m}(\overline{d})^{q-m}$$

$$\begin{pmatrix}l=-p, & -p+1, & \cdots, & p-1, & p\\ m=-q, & -q+1, & \cdots, & q-1, & q\end{pmatrix}$$

$$E_{p_1,q_1}: a^{p_1+l_1}d^{p_1-l_1}(\overline{a})^{q_1+m_1}(\overline{d})^{q_1-m_1}$$

$$\begin{pmatrix}l_1=-p_1, & -p_1+1, & \cdots, & p_1-1, & p_1\\ m_1=-q_1, & -q_1+1, & \cdots, & q_1-1, & q_1\end{pmatrix}$$

或，注意 $ad=1$：

$$E_{p,q}: a^{2l}(\overline{a})^{2m}; \ E_{p_1,q_1}: a^{2l_1}(\overline{a})^{2m_1}。$$

我們可以取任意非零复数作为 a，而且显然可以如此选擇使得矩陣 $E_{p,q}$ 的特征値集合不同于矩陣 E_{p_1,q_1} 的特征値集合，这就証明了，对于不同的値 j 与 j' 表示(187)是不等价的。必須注意，当 $j'=0$ 时表示(187)与表示(185)一致，而当 $j=0$ 时它就与这样的表示一致，这个表示系在(185)中令 $j=j'$ 而且把 a, b, c 与 d 用它們

的共軛数代替而得到。必須注意表示(187)的一个特点，这些表示不等价于U表示。假定它們每个是与某一个U表示等价，則这个表示的任意矩陣的所有特征值必須有值等于1的模，而在上面我們看到，在表示$E_{p,q}$中这些特征値当$b=c=0$时等于$a^{2l}(\bar{a})^{2m}$，而这些值的模显然可能不等于1，不过有一个例外，就是表示$E_{0,0}$，这个表示显然是一个恒等表示，它使得单位1对应于群(183)的所有元素。

在[66]中我們曾經看到，如果某一个表示，但不一定与U表示等价，是可約的，就是說等价于这样的表示，其矩陣都是具有同一結构的准对角形式，則必定存在有这样的矩陣，它不是单位矩陣的倍数，但是与該表示中所有矩陣可以交換。因此，为了証明(187)中的任意表示决不是可約的，那只需表明，如果有一个矩陣，它与(187)的某一个表示的所有矩陣可以交換，則它必是单位矩陣的倍数。这可以完全仿[68]来作。因此，表示(187)中每两个不互相等价而且每一个都是不可約的表示。与我們在[65]中曾經引进的可約性的定义不同，可約性常常还有另一个定义，那就是，一个表示叫做可約的，如果它的所有变换(假設它們的阶为n)使同一个子空間L_k不变，而$0<k<n$。

[65]中我們看到，如果在現在意义下的可約表示系由U矩陣組成，則它在[65]的意义下也是可約的，就是說，它等价于某一准对角形的表示。如果表示不是U型的，則从某子空間的不变性不能推出在[65]的意义下的可約性。我們可以指出，(187)的每个群表示不仅在原来意义下是不可約的，如我們曾經証明的，而且它不使任何子空間不变。此外我們可以指出，群(183)的每个綫性表示或者等价于表示(187)的某一个或者等价于由(187)中的某些表示所組成的一个已約形式的表示。

在[73]中我們看到，群的两个綫性表示的合成与参与合成的

該两綫性表示的对象的速乘有同等的意义。如果能注意这一点，则可以斷定，对表示(187)而言，其表示的对象系为表达式：

$$\eta_{kk'}=\frac{x_1^{j+k}x_2^{j-k}}{\sqrt{(j+k)!(j-k)!}}\cdot\frac{y_1^{j'+k'}y_2^{j'-k'}}{\sqrt{(j'+k')!(j'-k')!}},$$

$$\begin{pmatrix}k=j,\ j-1,\ \cdots,\ -j+1,\ -j\\ k'=j',\ j'-1,\ \cdots,\ -j'+1,\ -j'\end{pmatrix}$$

而且 x_1 与 x_2 承受变换(183)，而 y_1 与 y_2——变换(184)。

到目前为止，我們只談到正劳倫次变換群的表示[64]。正劳倫次变換仅系劳倫次变換的一部分，即行列式等于1的那些变換。此外，还有行列式为(−1)的劳倫次变換。关于这个更一般的变換集合的研究，以及关于把正劳倫次变換群的綫性表示推到整个劳倫次群的情形的研究，如果和三維空間的正交变換群的情形加以比較，就表現了某些特点。必須注意，当定义整个劳倫次群时，我們能够規定关于讀时間的方向的不变性的条件，此时我們必須把反射

$$x_1'=-x_1;\ x_2'=-x_2;\ x_3'=-x_3;\ x_4'=x_4.$$

加到所考察的劳倫次群中去。

关于上面提到的所有問題的研究，可以在卡当(Cartan)的"旋量論"(莫斯科，1947年)以及在方得瓦(Van der Waerden)的"在量子力学中的群論方法"中皆可找到。

81．关于劳倫次群的单純性的定理　仿照在[70]中我們曾經应用过的方法，我們現在来証明，劳倫次群是一个单純群。为此只需指出，由变換(183)所組成的群 G 除了由 E 与 $-E$ 所做成的正規子群以外不包含其他任何正規子群。假設 G 含有这样一个正規子群 H_1，它包含一个与 E，$-E$ 不同的矩陣

$$A=\begin{Vmatrix}a, & b\\ c, & d\end{Vmatrix}\quad(ad-bc=1),$$

要来証明，H_1 与 G 一致。如果 H_1 包含某一矩陣 B，則 H_1 包含所有矩陣 $U^{-1}BU$，其中 U 取 G 中任意矩陣。注意关于化矩陣为标准形式的基本結果，以及下列的事实，用以化任一矩陣为标准形式的矩陣 U，其行列式恒可取为 1 [27]，于是我們只需証明，H_1 首先包含具有任意可能不同的特征值 t 与 t^{-1} 的矩陣，其中 t 为任意不为 0 和 $(+1)$ 的复数。必須注意，群 G 的矩陣的特征值的乘积应当等于 1，其次，H_1 必須包含矩陣 E 与 $-E$，此外，如果考慮到特征值相等以及有重初等因子的情形，我們还应当証明，H_1 包含矩陣

$$\begin{Vmatrix} 1, & 0 \\ 1, & 1 \end{Vmatrix} \quad 与 \quad \begin{Vmatrix} -1, & 0 \\ 1, & -1 \end{Vmatrix}。\tag{188}$$

在 G 中取一个未定的矩陣

$$X = \begin{Vmatrix} x, & y \\ z, & x \end{Vmatrix} \quad (x^2 - yz = 1)$$

而且作矩陣 $$Y = A(XA^{-1}X^{-1}),$$

这个矩陣应当属于 H_1。矩陣 Y 的迹 s 可以表成下式：

$$s = 2 + bz^2 + cy^2 - [(a-d)^2 + 2bc]yz。$$

因为矩陣 A 不等于 E，$-E$，我們决不能同时有 $b=c=0$ 与 $a=d$。因此 s 决不是一个常数，而且当 y 与 z 变化时，我們可以給 s 以任何复数值。在另一方面，矩陣 Y 的特征值系由下列二次方程来决定：

$$\lambda^2 - s\lambda + 1 = 0。$$

所以这对根可以取任意的值 t 与 t^{-1}，因而 H_1 包含所有这样的特征值不同而行列式为 1 的矩陣。其次，H_1 显然包含 E，同时包含 $-E$，因为它可表成两个矩陣的乘积：

$$-E = [t, t^{-1}][-t^{-1}, -t],$$

而其中每个因子皆属于 H_1。其次，矩陣(188)容易表成两个特征

値不同而行列式为1的矩陣的乘积，从而它包含在H_1中，实际上：

$$\left.\begin{aligned}\begin{Vmatrix}1, & 0\\1, & 1\end{Vmatrix}&=\begin{Vmatrix}\frac{1}{\beta}, & 0\\0, & \beta\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}\beta, & 0\\\frac{1}{\beta}, & -\frac{1}{\beta}\end{Vmatrix}\\\begin{Vmatrix}-1, & 0\\1, & -1\end{Vmatrix}&=\begin{Vmatrix}\frac{1}{\beta}, & 0\\0, & \beta\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}-\beta, & 0\\\frac{1}{\beta}, & -\frac{1}{\beta}\end{Vmatrix}\end{aligned}\right\}。\quad(\beta\neq 0,\ \pm 1)$$

这样就証明了，H_1必須与G一致，就是說，除了由E及$-E$組成的正規子群外，G不包含其他正規子群，同时也就証明了，正劳倫次变換群是一个单純群。与[70]一样，从而可以推出，这个群决不可能有准同构(不为同构)表示。

82. 連續群．結构常数 三維空間的轉动群与正劳倫次变換群系为无限群的这样的例子，其元素依賴于連續变化的参变数。对于轉动群，例如，尤拉角就可以作为参变数。在討論过的各种情形中，群都是由綫性变換所組成，而且群对参变数的依賴关系就归結为用以决定上述綫性变換的矩陣依賴于这些参变数。以下我們将考察綫性变換群。

假設有某一群系由綫性变換所組成，而这些綫性变換的矩陣的元素a_{ik}为r个实参变数$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$的函数，而且适合現在要来指出的条件。假設对于所有充分逼近于零的参变数α_s的値；a_{ik}为这些参变数的单値函数，而且参变数的零値$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_r=0$对应于群$G$的单位矩陣，就是：$a_{ik}=0$当$i\neq k$而$a_{ii}=1$。其次假設对于充分逼近于单位元素的群$G$的每个元素都有充分逼近于零的参变数$\alpha_s$的一个确定的値对应于它。所謂群元素逼近于单位元素的意义就是，与該群元素相当的矩陣的元素a_{ik}当$i\neq k$时

它逼近于零而当 $i=k$ 时它逼近于1。因此，在上述假設下，在单位元素的一个确定的邻域内的群 G 的元素与 r 維实空間 T_r 的坐标原点的某一个邻域内的元素之間存在有一个一一对应关系。以后我們不仅有这样的一个局部的一一对应关系，而且有一个整体的一一对应关系，这个整体的一一对应使得对于群 G 的每一个元素，在空間 T_r 的包含原点在内的某一区域 V 内都有一个确定的点与之对应，而且反过来，V 内每一点恒对应于群 G 的某一确定的元素。目前我們只需要提出上述局部的对应关系。对应于参变数值 $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s$ $(s=1, 2, \cdots, r)$ 的群 G 的元素分别表作 $G_\alpha, G_\beta, G_\gamma$。就局部的观点看来，应当认为，参变数应充分与零逼近，而群元素应充分与单位逼近。

我們来看任何两个群元素的乘积：

$$G_\beta G_\alpha = G_\gamma,$$

这个由乘法得来的对应于群元素 G_γ 的参数 γ_s 是参数 α_s 与 β_s 的单值函数：

$$\gamma_s = \varphi_s(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r;\ \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)。\qquad (189)$$

我們預先假設，这是連續函数而且对于所有充分逼近于零的 α_s 与 β_s 有連續的微商，直到四阶为止。

因为参变数的零值对应于群的单位元素，我們得到等式

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_s(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r;\ 0, 0, \cdots, 0) = \beta_s; \\ &\varphi_s(0, 0, \cdots, 0;\ \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) = \alpha_s, \end{aligned}\right\} \quad (s=1, 2, \cdots, r) \qquad (190)$$

从而推出

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi_i}{\partial \beta_k} = \delta_{ik} \quad 当\ \alpha_s = 0; \\ &\frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha_k} = \delta_{ik} \quad 当\ \beta_s = 0。\end{aligned}\right\} \quad (s=1, 2, \cdots, r) \qquad (191)$$

显然对应于逆元素 G_α^{-1} 的参变数 $\tilde{\alpha}_s$ 是被下列关系

$$\varphi_s(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \cdots, \tilde{\alpha}_r; \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) = 0 \quad (s=1, 2, \cdots, r) \qquad (192)$$

确定而且这个关系当所有 α_s 与 $\tilde{\alpha}_s$ 为零时仍然成立。方程(192)的左端对 $\tilde{\alpha}_s$ 的函数行列式，由于 (191)，当 α_s 与 $\tilde{\alpha}_s$ 等于零时它等于1。因此，按照关于隐函数的定理，方程(192)对于所有充分逼近于零的 α_s 确定 $\tilde{\alpha}_s$ 为連續函数，而且当 $\alpha_s=0$ 时 $\tilde{\alpha}_s$ 变成零。利用馬克劳林公式，按 α_s 与 β_s 的冪展开函数(189)，一直展到三次項为止，注意公式(190)与(191)，卽得

$$\gamma_s = \alpha_s + \beta_s + \sum_{i,k} a_{i,k}^{(s)} \alpha_i \beta_k + \sum_{i,k,l} a_{i,k,l}^{(s)} \alpha_i \alpha_k \beta_l + \\ + \sum_{i,k,l} b_{i,k,l}^{(s)} \alpha_i \beta_k \beta_l + \varepsilon^{(s)}, \qquad (193)$$

其中 $a_{i,k}^{(s)}$, $a_{i,k,l}^{(s)}$ 与 $b_{i,k,l}^{(s)}$ 是数字系数，$\varepsilon^{(s)}$ 对于 α_s 与 β_s 而言至低是一个四阶无穷小，而且和数系按 i, k, l 独立地取从1到 r 的值。差数

$$C_{ik}^{(s)} = a_{ik}^{(s)} - a_{ki}^{(s)} \quad (s, i, k=1, 2, \cdots, r) \qquad (194)$$

叫做在所取的参变数 α_s 的选擇下的群 G 的結构常数。

如果引进新的参变数 α'_s 以代替 α_s：

$$\alpha_s = \omega_s(\alpha'_1, \alpha'_2, \cdots, \alpha'_r) \quad (s=1, 2, \cdots, r)$$

使得 $\omega_s(0, 0, \cdots, 0)=0$，此等式当所有 α_s 充分逼近于零时，可以对 α'_s 唯一地解出来，而且函数 ω_s 具有充分高阶的微商，則在新参变数 α'_s 下的結构常数可能是别样的。

从定义(194)直接推出：

$$C_{ki}^{(s)} = -C_{ik}^{(s)}。 \qquad (194_1)$$

此外，利用(192)以及关于群 G 元素乘法的結合律，还可以証明結构常数間的如下的关系：

$$\sum_{s=1}^{r} (C_{is}^{(t)} C_{jk}^{(s)} + C_{js}^{(t)} C_{ki}^{(s)} + C_{ks}^{(t)} C_{ij}^{(s)}) = 0$$

$$(i, j, k, t=1, 2, \cdots, r) \qquad (194_2)$$

以下我們并不用这个关系而且也不証明它。

現在回到公式(193)。当 α_s 与 β_s 充分逼近于零时，γ_s 卽逼近于零。参照公式(191)以及关于隐函数的定理，卽可以断言，在空間 T_r 的坐标原点的某一个邻域内方程(193)对 β_s 是可解的：

$$\beta_s=\psi_s(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_r; \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)$$
$$(s=1, 2, \cdots, r)。 \tag{195}$$

同时必須注意，条件：$\beta_s=0(s=1, 2, \cdots, r)$ 与条件：$\gamma_s=\alpha_s(s=1, 2, \cdots, r)$ 是一样的。利用公式(193)与(195)，我們来作两个 r 阶正方矩陣 $S(\alpha_s)$ 与 $T(\alpha_s)$，其元素系为依賴于参变数 α_s 的 $S_{ik}(\alpha_s)$ 与 $T_{ik}(\alpha_s)$：

$$S_{ik}(\alpha_s)=\left(\frac{\partial\gamma_i}{\partial\beta_k}\right)_{\beta_s=0}; \ T_{ik}(\alpha_s)=\left(\frac{\partial\beta_i}{\partial\gamma_k}\right)_{\gamma_s=\alpha_s}$$
$$(s, i, k=1, 2, \cdots, r)。 \tag{196}$$

参考复合函数的微商法則而且計算出 γ_i 对于 γ_k 的微商或 β_i 对于 β_k 的微商，我們得到：

$$S(\alpha_s)T(\alpha_s)=E \text{ 与 } T(\alpha_s)S(\alpha_s)=E, \tag{197}$$

其中 E 为 r 阶单位矩陣。从公式(191)推出，$S(\alpha_s)$ 当参变数 $\alpha_s=0$ 时变成单位矩陣。同时从(197)推出，$T(\alpha_s)$ 具有同样的性质。不难用上述矩陣的元素表出結构常数 $C_{ik}^{(s)}$，卽：

$$C_{ik}^{(p)}=\left(\frac{\partial S_{pk}(\alpha_s)}{\partial\alpha_i}-\frac{\partial S_{pi}(\alpha_s)}{\partial\alpha_k}\right)_{\alpha_s=0} \tag{198}$$

或

$$C_{ik}^{(p)}=\left(\frac{\partial T_{pi}(\alpha_s)}{\partial\alpha_k}-\frac{\partial T_{pk}(\alpha_s)}{\partial\alpha_i}\right)_{\alpha_s=0}。 \tag{199}$$

实际上，由于(193)与(196)，得到：

$$a_{ik}^{(p)}=\left(\frac{\partial\gamma_p}{\partial\alpha_i\partial\beta_k}\right)_{\alpha_s=\beta_s=0}=\left(\frac{\partial S_{pk}(\alpha_s)}{\partial\alpha_i}\right)_{\alpha_s=0}, \tag{200}$$

改换指标 i 与 k，又可以写成：

$$a_{ki}^{(p)}=\left(\frac{\partial S_{pi}(\alpha_s)}{\partial\alpha_k}\right)_{\alpha_s=0}, \tag{201}$$

由此卽可直接推出(198)，其次，注意(197)，遂有

$$\sum_{j=1}^{r} S_{pj}(\alpha_s)T_{jk}(\alpha_s)=\delta_{pk}。$$

对 α_t 微分两端，然后使所有 α_s 等于零。注意矩陣 $S(\alpha_s)$ 与 $T(\alpha_s)$ 当 $\alpha_s=0(s=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$ 时变成单位矩陣，卽得：

$$\left(\frac{\partial S_{pk}(\alpha_s)}{\partial \alpha_t}\right)_{\alpha_s=0}+\left(\frac{\partial T_{pk}(\alpha_s)}{\partial \alpha_t}\right)_{\alpha_s=0}=0,$$

卽，由于(201)：

$$a_{tk}^{(p)}=-\left(\frac{\partial T_{pk}(\alpha_s)}{\partial \alpha_t}\right)_{\alpha_s=0},$$

由此同样推出公式(199)。公式(193)确定了基本的群运算，它根据群 G 的元素 G_α 与 G_β 的参变数 α_s 与 β_s 卽可給出对应于乘积 $G_\beta G_\alpha$ 的参变数 γ_s。从表达式(193)看出当 α_s 与 β_s 充分逼近于零时，就第一近似値而言，群运算被化成下式：$\gamma_s=\alpha_s+\beta_s$，以至于就第一近似値而言群是可交换的。如果群确实是可交换的，則：

$$\varphi_s(\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_r;\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_r)=$$
$$=\varphi_s(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_r;\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_r)\quad(s=1,\ 2,\ \cdots,\ r),$$

并且在展开式(193)中 $a_{kt}^{(s)}=a_{tk}^{(s)}$，就是說，阿倍尔群的所有結构常数皆等于零。对于一般群来說，正是展开式中的二次項使得交換律不成立，这就是由非零的結构常数的存在所說明。利用展开式(193)，不难得到对应于元素 G_α^{-1} 的参变数 $\tilde{\alpha}_s$ 的展开式。为此应当在公式(193)內令 $\gamma_s=0$ 而且用 $\tilde{\alpha}_s$ 代替 β_s。应用隐函数的通常的微分法則，得到：

$$\tilde{\alpha}_s=-\alpha_s+\sum_{t,k} a_{tk}^{(s)}\alpha_t\alpha_k+\varepsilon_1^{(s)},$$

其中 $\varepsilon_1^{(s)}$ 对于 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_r$ 而言至低是一个三阶无穷小。

83. 无穷小变換　假設和前面一样有一个連續的 n 阶綫性变換群 G，它由参变数 $\alpha_s(s=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$ 所确定。对应于参变数 α_s

的变换的矩陣仍用記号 G_α 来表示，使得变换取下列形式：

$$x=G_\alpha u, \tag{202}$$

其中 u 为 n 維复空間 R_n 的任意矢量而 x 系变成的矢量。我們来引进矩陣的微分运算，就是：如果某矩陣 A 的元素是某参变数 t 的可微函数，則矩陣 A 对参变数 t 的微商定义为这样的矩陣，其元素系为 A 的元素对 t 的微商，即

$$\left\{\frac{dA}{dt}\right\}_{ik}=\frac{d\{A\}_{ik}}{dt}。$$

如果 A 的元素依賴于多个变数，則我們仿上可以定义 A 的偏微商。

完全一样，如果空間 R_n 的矢量 $z(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ 的分量是 t 的可微函数，則矢量 $\frac{dz}{dt}$ 定义为具有分量 $\frac{dz_i}{dt}$ 的矢量，就是說，微分矢量归到微分它的分量[II; 107]。

現在引进所謂群 G 的无穷小变换：

$$I_k=\left(\frac{\partial G_\alpha}{\partial \alpha_k}\right)_{\alpha_s=0} \quad (k=1, 2, \cdots, r)。 \tag{203}$$

記号 I_k 显然表示某一数字元素的 n 阶矩陣。

現在回到公式(202)而且假設 u 是一个固定矢量，即它的分量与 α_s 无关。变换后的矢量，一般說来，已要依賴于这些参变数，現在我們来导出关于这个矢量的基本微分方程。为此将(202)两端施以由矩陣 G_β 所确定的綫性变换：

$$G_\beta x=G_\gamma u,$$

其中 $G_\gamma=G_\beta G_\alpha$，而参变数 γ_s 系按照基本群运算(193)被 α_s 与 β_s 确定。将这公式的两端对 β_p 微分，然后令 $\beta_s=0$，即 $\gamma_s=\alpha_s$。引用定义(203)，我們得到：

$$I_p x=\sum_{j=1}^{r}\left[\frac{\partial(G_\gamma u)}{\partial \gamma_j}\right]_{\gamma_s=\alpha_s}\left(\frac{\partial \gamma_j}{\partial \beta_p}\right)_{\beta_s=0}。$$

在和号下的第一个因子显然等于 (202) 的左端对 α_j 的微商，而且注意符号(196)，上面公式可以换写成：

$$I_p x = \sum_{j=1}^{r} S_{jp}(\alpha_s)\frac{\partial x}{\partial \alpha_j} \quad (p=1, 2, \cdots, r)。$$

如果引进矢量：

$$X\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial x}{\partial \alpha_2}, \cdots, \frac{\partial x}{\partial \alpha_r}\right) \text{ 与 } Y(I_1 x, I_2 x, \cdots, I_r x),$$

則前面的公式又可以改写成綫性变换的形式：

$$Y = S^*(\alpha_s)X,$$

其中 $S^*(\alpha_s)$ 系通常的轉置矩陣的記号。将两端从左边乘以 $T^*(\alpha_s)$ 并且注意(197)，卽得：

$$X = T^*(\alpha_s)Y,$$

把它明白地写出来：

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha_p} = \sum_{j=1}^{r} T_{jp}(\alpha_s) I_j x \quad (p=1, 2, \cdots, r)。 \tag{204}$$

对于由公式(202)确定的矢量 x 的分量 x_k，我們有

$$\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_p} = \sum_{j=1}^{r} T_{jp}(\alpha_s) \sum_{t=1}^{n} \{I_j\}_{kt} x_t \quad \begin{pmatrix} k=1, 2, \cdots, n \\ p=1, 2, \cdots, r \end{pmatrix}, \tag{205}$$

其中 $\{I_j\}_{kt}$ 系矩陣 I_j 的第 k 行 t 列元素。我們应当添加初值条件于 x 的方程(204)，这个条件可直接从公式(202)得到：

$$x|_{\alpha_s=0} = u, \tag{206}$$

其中 u 为任意給定的矢量。必須注意，出現在方程(204)的系数中的量 $T_{jp}(\alpha_s)$ 系直接由群运算 (193) 确定。方程 (204) 使得我們可以得到 I_j 間的某种关系，为此只需求出 x 对 α_p 与 α_q 的二阶微商而且注意其結果与微分的次序无关。

从(204)推得

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha_p \partial \alpha_q} = \sum_{j=1}^{r}\left(\frac{\partial T_{jp}(\alpha_s)}{\partial \alpha_q} I_j x + T_{jp}(\alpha_s) I_j \frac{\partial x}{\partial \alpha_q}\right)$$

或，利用 $\frac{\partial x}{\partial \alpha_p}$ 当 $p=q$ 的表达式(204)以代替 $\frac{\partial x}{\partial \alpha_q}$，我們得到：

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha_p \partial \alpha_q}=\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial T_{jp}(\alpha_s)}{\partial \alpha_q}I_j x+\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}T_{jp}(\alpha_s)T_{kq}(\alpha_s)I_j I_k x。$$

在这等式的右端調換 p 与 q，然后让如此得到的表达式与上面等式右端相等，于是即得到方程組(205)的推論如下：

$$\Big[\sum_{j=1}^{r}\Big(\frac{\partial T_{jp}(\alpha_s)}{\partial \alpha_q}-\frac{\partial T_{jq}(\alpha_s)}{\partial \alpha_p}\Big)I_j+\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}[T_{jp}(\alpha_s)T_{kq}(\alpha_s)-$$

$$-T_{jq}(\alpha_s)T_{kp}(\alpha_s)]I_j I_k\Big]x=0。\qquad (207)$$

假設在这个关系內所有 α_s 等于零。注意公式(199)以及如果所有 α_s 等于零，則 $T(\alpha_s)=E$ 的这一結果，我們得到：

$$\Big[\sum_{j=1}^{r}C_{pq}^{(j)}I_j+(I_p I_q-I_q I_p)\Big]u=0,$$

由于矢量 u 可以任意，从而推出无穷小变换間的下列关系：

$$I_q I_p-I_p I_q=\sum_{j=1}^{r}C_{pq}^{(j)}I_j \quad (p,\ q=1,\ 2,\ \cdots,\ r)。\qquad (208)$$

从給定的連續群 G 出发，我們定义了 I_j，而且利用方程(204)，我們又証明了关系(208)，現在我們来証明，方程(204)或者同样的方程組(205)对于給出的初值条件(206)有唯一解。假定有两个这样的解。由于方程(204)是綫性的，这两解的差仍然应当适合該方程而且当 $\alpha_s=0$ 时应当变成零矢量。因此只須証明，方程(204)的解 x 在初值条件为零的情形下恒等于零。为了书写簡单起見，我們只看 $r=3$ 的情形。設 $x(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$ 为这样的一解。我們来看当 $p=1$ 的方程(204)而且在其右端令 $\alpha_2=\alpha_3=0$。于是得到一个独立变数为 α_1 的常微分方程，其初值条件为零。由于已知的唯一性定理[**II**, **50**]，其解恒等于零，即 $x(\alpha_1,\ 0,\ 0)\equiv 0$。現在来看当 $p=2$ 的方程(204)而且在其右端令 $\alpha_3=0$。这个独立变数为 α_2 的常微分方程，如剛才所表明的，具有为零的初值条件：当 $\alpha_2=0$ 时

$x(\alpha_1, \alpha_2, 0)=0$，所以，根据唯一性定理，$x(\alpha_1, \alpha_2, 0)\equiv 0$。現在来看当 $p=3$ 的方程 (204)。这个常微分方程具有零初值条件：当 $\alpha_3=0$，$x(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=0$，因此，$x(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\equiv 0$。这就是所求証的。

所以当无穷小变换 I_j 以及由群运算 (193) 所确定的 $T_{jp}(\alpha_s)$ 皆被給出的时候，方程 (204) 只能导出一个有限的变换，換句話說，群可由无穷小变換来确定。这对于我們今后是重要的。方程 (204) 的解的存在証明是建立在关于偏微分方程的一个一般的定理，当其应用于方程 (204) 时可表述如下：使得方程 (204) 在任意初值条件 (206) 下恒有解的充分与必要条件为，包含在公式 (207) 內的方括号，不管 p，q 怎样选取，对于 α_s 总是恒等于零。以后我們并不利用这个存在定理。

84. 轉动群 作为一个例子，我們来考察在空間中繞坐标原点的空間轉动群。与此对应的三阶矩陣依賴于三个参变数。这些参变数可以取尤拉角。我們現在来引进其他的参变数 α_1，α_2，α_3，以下的一切計算都要借它們表达出来。我們可以把每个轉动看作繞某一有方向的軸 l 取逆时針方向的轉动，而这軸 l 通过坐标原点，所轉动的角度不超过 π。据此，对于繞同一軸轉动同一角度 π 的两个轉动，纵使它們的軸所取的方向相反，这两个轉动仍然导出同一的終极位置，因此，对于每个轉动，我們可以用这样一个从原点出发的矢量来表示它，这个矢量的方向与轉动軸的方向一致而它的长度等于該轉动的角度。这个矢量在三坐标軸上的射影 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 将作为我們的参变数。

如果我們取以坐标原点为心的以 π 为半徑的球 V 而且該球的每个直徑的两端点看作等同的点，則在球 V 的点 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 与轉动群的元素之間建立了一个一一对应关系。在現在的情形，这种关系不仅在坐标原点与群单位的一个邻域之內成立，而且也在

整个的群內成立，只要取整个球 V 的話，于是，凡出現在轉动群內的所有矩陣都可以用参变数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 来表示而且可以証明它們有我們在上面曾經談到的連續性并且微商存在。

如果我們直接来計算无穷小变換的矩陣的話，我們不必求出在所考虑的情形下关于基本群运算的公式(193)，即可定义結构常数。

为了計算 I_1，我們可以认为 $\alpha_2=\alpha_3=0$，然后对 α_1 微分变換的矩陣，最后令 $\alpha_1=0$。但是当 $\alpha_2=\alpha_3=0$ 时，此时轉动系繞軸 X，轉动一个 α_1 的角度，它可表成下面的形式

$$
\begin{aligned}
x_1' &= x_1,\\
x_2' &= x_2\cos\alpha_1 - x_3\sin\alpha_1,\\
x_3' &= x_2\sin\alpha_1 + x_3\cos\alpha_1。
\end{aligned}
$$

对 α_1 微分这个变换的矩陣，然后令 $\alpha_1=0$，即得：

$$
I_1=\begin{Vmatrix} 0, & 0, & 0\\ 0, & 0, & -1\\ 0, & 1, & 0 \end{Vmatrix}。 \tag{209}
$$

仿此可得

$$
I_2=\begin{Vmatrix} 0, & 0, & 1\\ 0, & 0, & 0\\ -1, & 0, & 0 \end{Vmatrix}; \quad I_3=\begin{Vmatrix} 0, & -1, & 0\\ 1, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 0 \end{Vmatrix}。 \tag{210}
$$

此后我們可以直接算出关系(208)的左端，而且正是用它来确定結构常数。这种初等計算使我們得到下列三关系：

$$
I_1I_2-I_2I_1=I_3;\quad I_2I_3-I_3I_2=I_1;\quad I_3I_1-I_1I_3=I_2。 \tag{211}
$$

如果把公式(202)的右端按 α_s 的冪展开而且只限于考虑它的一次項，則近似地得到：

$$
\boldsymbol{x} \doteq \boldsymbol{u}+(\alpha_1I_1+\alpha_2I_2+\alpha_3I_3)\boldsymbol{u}。
$$

因此矢量 $\boldsymbol{u}$ 在上述变換（对应于参变数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$）的作用下經受

一个如下的改变:

$$\delta \boldsymbol{u} \doteq \alpha_1 I_1 \boldsymbol{u} + \alpha_2 I_2 \boldsymbol{u} + \alpha_3 I_3 \boldsymbol{u}\text{。}$$

等式右端每一項使得 $\boldsymbol{u}$ 在繞坐标軸之一的一个微小轉动下引起一个改变。例如,当繞軸 X 轉动一个微小的角度 α_1 的时候,我們得矢量 $\boldsymbol{u}$ 的分量 (u_1, u_2, u_3) 的一个改变:

$$\delta u_1 \doteq 0;\ \delta u_2 \doteq -u_3\alpha_1;\ \delta u_3 \doteq u_2\alpha_1\text{。}$$

此时和上面一样,我們只考慮限于 α_1 的一次項。

85. 无穷小变換与轉动群的表示　現在我們来闡明关于无穷小变換与轉动群表示的关系。所謂在恒等变換的邻域内的一个一一对应的表示我們了解为 n 阶矩陣 $F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,而矩陣的元素是参变数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的連續而且可微的函数。每个轉动 D 可以表示在上述邻域内的有限多个轉动的乘积,于是对应于这有限多个轉动的矩陣的乘积就是 D 的表示。但是,就整个群来讲,由此可以产生一个轉动群的多值表示,因为当轉动参变数連續变化而且在从新回到原来的轉动时,我們可能得到該轉动的一个新的表示,以前当討論整个轉动群的双值表示时我們曾經遇到过它[**69**]。

对于矩陣 $F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 我們有如轉动本身一样的群运算,因而也有同样的結构常数。对于由矩陣 $F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 所組成的群 G' 我們可以作无穷小变換 I_k,它們是某些被关系 (211) 联結着的 n 阶矩陣。如果我們能够找着矩陣 I_k,则我們可以写出关于 R_n 中的矢量 $\boldsymbol{x}$ 的微分方程 (204),因为 $T_{ip}(\alpha_s)$ 单由群运算来决定。这些方程对于給定的初值条件(206)只能有一解;显然,只有这个解才可能是那样的变換

$$\boldsymbol{x} = F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\boldsymbol{u},$$

它在恒等变換的邻域内給出轉动群的一个表示。

在現在的情形 $r=3$,如果将方程 (204) 换成矢量 $\boldsymbol{x}$ 的分量的写法,则我們得到关于矢量 $\boldsymbol{x}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的 n 个分量的 $3n$ 个

方程。以后对于我們重要的只是，在給定的初值条件(206)下方程(204)决不可能有个数多于1的解，如在前面已經説过的，它可表述如下：轉动群的每个表示完全决定于它的无穷小变換 I_1, I_2, I_3。

因此，所有一切皆归結到决定表示的无穷小变換，我們現在就轉到这个問題上来。代替要寻找的矩陣 I_1, I_2, I_3，我們来引进矩陣：

$$A_1=-I_2+iI_1;\quad A_2=I_2+iI_1;\quad A_3=iI_3\text{。}\tag{212}$$

容易驗算，代替(211)，对于这些矩陣我們得到下列关系：

$$\left.\begin{aligned}A_3A_1-A_1A_3&=A_1\\A_3A_2-A_2A_3&=-A_2\\A_1A_2-A_2A_1&=2A_3\text{。}\end{aligned}\right\}\tag{213}$$

在以矩陣 $F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 的表示内应当包含有，繞 Z 軸的阿倍尔轉动群的表示，这个阿倍尔群的元素对应于矩陣 $F(0, 0, \alpha_3)$。适当地选擇基本矢量，所有这些矩陣可以同时化成对角形式，因为阿倍尔群的不可約表示都是一阶表示。对于这样选定的基本矢量，变換 $F(0, 0, \alpha_3)$ 将取下列形式[69]：

$$F(0, 0, \alpha_3)\boldsymbol{v}=e^{l\alpha_3}\boldsymbol{v}$$

或，令 $l=-im$ 且用 $\boldsymbol{v}_m$ 記 $\boldsymbol{v}$：

$$F(0, 0, \alpha_3)\boldsymbol{v}_m=e^{-im\alpha_3}\boldsymbol{v}_m\text{。}$$

因为我們只在 $\alpha_s=0(s=1, 2, 3)$ 的邻域内規定存在表示的单值性，我們不必把 m 看作整数。根据 I_3 的定义，由是得到：

$$A_3\boldsymbol{v}_m=iI_3\boldsymbol{v}_m=i\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_3}F(0, 0, \alpha_3)\boldsymbol{v}_m\right]=$$

$$=i\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_3}e^{-im\alpha_3}\boldsymbol{v}_m\right)=m\boldsymbol{v}_m\text{。}$$

那末

$$A_3\boldsymbol{v}_m=m\boldsymbol{v}_m,\tag{214}$$

就是說，v_m 为算子 A_3 的特征矢量，它对应于特征値 m。如果这样的特征矢量不止一个，則用 v_m 代表其中之一。

現在我們来証明下列引理：

引理 如果某一矢量 v 为算子 A_3 的特征矢量，它对应于特征値 a，則矢量 A_1v，如果它不等于零，仍是 A_3 的特征矢量而且对应于特征値 $(a+1)$，同样地，A_2v 为 A_3 的特征矢量而且对应于特征値 $(a-1)$。

按照引理的条件 $A_3v=av$，由于(213)我們有

$$A_3(A_1v)=(A_1A_3+A_1)v=A_1(A_3v)+A_1v=$$
$$=A_1(av)+A_1v=(a+1)A_1v$$

而且完全同样有

$$A_3(A_2v)=(a-1)A_2v\text{。}$$

A_3 的不同的特征値的个数不能超过 n。在这些値中間一定有一个或几个的实数部分是最大的。用 j 来表示这个特征値，如有几个的話，即表示其中的一个，而且令 v_j 表相当的特征矢量(如果对应于 j 的特征矢量不止一个，即表其中的某一个)，据引理，矢量 A_1v_j 必将对应于特征値 $(j+1)$，但是，按照 j 的定义，这样的特征値 A_3 是沒有的。因而我們必須有

$$A_1v_j=0\text{。} \qquad (215)$$

根据在上面証明的引理，矢量：

$$v_{j-1}=A_2v_j;\quad v_{j-2}=A_2v_{j-1};\quad\cdots \qquad (216)$$

如果它們皆不等于零，依次对应于算子 A_3 的特征値 $(j-1)$，$(j-2)$，…。矢量序列 (216) 最后必須終止于零矢量，因为 A_3 的不同的特征値的个数不超过 n。現在来証明公式

$$A_1v_k=\rho_kv_{k+1}\quad(k=j,\ j-1,\ j-2,\ \cdots); \qquad (217)$$

其中 ρ_k 为整数。根据(215)，当 $k=j$ 时，公式是对的，因为此时可令 $\rho_j=0$ 而把 v_{j+1} 可取作零矢量。現在假定，公式(217)对于上述

的某一个 k 是对的，而来証明它对于 $(k-1)$ 也是对的，根据(213)，(216)，(217)，我們有：

$$A_1v_{k-1}=A_1(A_2v_k)=(A_2A_1+2A_3)v_k=$$
$$=A_2(A_1v_k)+2A_3v_k=A_2(\rho_kv_{k+1})+2kv_k=(\rho_k+2k)v_k。$$

必須注意，当 $k=j$ 时，我們不必利用公式：

$$A_2v_{k+1}=v_k,\ \text{因为}\ \rho_k=0\ \text{当}\ k=j。$$

公式(217)因此被証明，而且数 ρ_k 由下列关系确定：

$$\rho_{k-1}=\rho_k+2k;\ \ \rho_j=0\qquad(k=j,\ j-1,\ \cdots)。$$

施行一系列的計算，我們得到：

$$\rho_k=j(j+1)-k(k+1)$$

卽

$$A_1v_k=[j(j+1)-k(k+1)]v_{k+1}\qquad(k=j,\ j-1,\ \cdots)。\qquad(218)$$

利用这个等式来确定在矢量(216)中第一个等于零的矢量的指标 s，卽 $v_s=0$ 而矢量 $v_{s+1}\neq 0$。此时从(217)推得 $\rho_s=0$，卽

$$j(j+1)-s(s+1)=0。$$

这个关于 s 的二次方程有两个根 $s=j$ 与 $s=-(j+1)$。$s=j$ 的値不合我們的要求，因为矢量 v_j 不等于零而且不包含在序列(216)里面。在序列(216)中的矢量以及矢量 v_j：

$$v_j,\ v_{j-1},\ \cdots,\ v_{-j+1},\ v_{-j}\qquad(219)$$

皆不等于零，且 $A_2v_{-j}=0$。这些矢量的个数等于 $(2j+1)$，由此看出，j 或者是一个不小于零的整数或者就是一个正奇数的二分之一。如果 $2j+1=n$，則我們可以把矢量(219)取作空間 R_n 的基础矢量。如果 $2j+1<n$，則它們在 R_n 内組成某一子空間 L_{2j+1}。假設是后一种情形，序列(219)中的每个矢量 v_k 满足方程

$$A_3v_k=kv_k\quad(k=j,\ j-1,\ \cdots,\ -j+1,\ -j),$$

其次我們有 $A_2v_k=v_{k-1}$，而且 $v_{j-1}=0$，以及公式(218)，因而，算子 A_1，A_2，与 A_3 将子空間 L_{2j+1} 变到它自身，而且上述諸公式完

全确定了在子空間 L_{2j+1} 內所表明的算子，再则，从公式 (216) 与 (218) 直接推出，在 L_{2j+1} 內沒有任何子空間 L_k，其維数 $0<k<2j+1$，而能在算子 A_1，A_2，A_3 的作用下保持不变，在确定 A_k 以后，对于子空間 L_{2j+1} 我們可以建立方程 (204)，此方程应为在子空間 L_{2j+1} 內所寻求的表示的矢量 x

$$x=F_j(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)u \tag{220}$$

所滿足。这个表示决不可能使包含在 L_{2j+1} 內的任何子空間 L_k 不变，就是說，表示在 L_{2j+1} 內不可約，因为，如果不然的話，則每个 A_s，由于它的定义，將必須使 L_k 不变，如剛才所見，这是决不能成立的，如果 $2j+1=n$，則上述的討論适用于整个的 R_n。当 $2j+1<n$ 时，我們可以从 R_n 內的总的表示分离出一个在上述意义下不可約的 $(2j+1)$ 阶表示，就是說，它不保持任何子空間 L_k 当 $0<k<2j+1$ 不变，从我們的討論直接推出，在对于相似表示不加区別的情形下，具有指定的阶的表示只有一个。但是，在[69]我們已經作出不可約的任意阶 U 表示。

因此这些 U 表示取尽了所有可能的不可約的表示，而且基于在 L_{2j+1} 內所作得的算子 A_s 的上述的表示必須与它們相似。

矢量(219)可以乘上一个不为零的任意数字因子，此时在关系(216)与(218)內也出現数字因子，这个因子可以如此选取，使得最后有下列关系：

$$\left.\begin{aligned}A_1v_k&=\sqrt{j(j+1)-k(k+1)}\,v_{k+1},\\A_2v_k&=\sqrt{j(j+1)-k(k-1)}\,v_{k-1},\\A_3v_k&=kv_k,\end{aligned}\right\} \tag{221}$$

而且 $v_{j+1}=0$ 与 $v_{-j-1}=0$。

当这样选取因子时，我們就得到了那些表示，就是从量

$$\eta_l=\frac{x_1^{j+l}x_2^{j-l}}{\sqrt{(j+l)!\,(j-l)!}} \tag{222}$$

出发的在[69]所作出的那些表示。

上面所述的作法使我們能够从任意表示中析出它的不可約部分，所有一切皆归結到找出属于算子 A_3 的具有最大特征值的特征矢量以及(216)的建立。

86. 劳倫次群的表示 我們来考察行列式为 1 的綫性变换群：

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= ax_1 + bx_2, \\ x_2' &= cx_1 + dx_2. \end{aligned}\right\} \quad (ad - bc = 1) \tag{223}$$

这变換的矩陣包含四个复系数，其間存有一个关系，保留任意的三个复数值可化成六个实参变数。如果对于变换的矩陣采取下面的記号：

$$A = \begin{Vmatrix} 1+\alpha_1+i\alpha_2, & \alpha_3+i\alpha_4 \\ \alpha_5+i\alpha_6, & d(\alpha_s) \end{Vmatrix}, \tag{224}$$

其中 $$d(\alpha_s) = \frac{1+(\alpha_3+i\alpha_4)(\alpha_5+i\alpha_6)}{1+\alpha_1+i\alpha_2},$$

于是我們就引进了这些参变数。进而我們即得到六个无穷小变换 I_k'。这是容易作出的，例如，为了作 I_1'，必須在矩陣 A 内除了 α_1 以外令所有其余 α_s 等于零，对 α_1 微分矩陣，然后令 $\alpha_1=0$。这样即得到：

$$I_1' = \begin{Vmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -1 \end{Vmatrix}; \quad I_2' = \begin{Vmatrix} i, & 0 \\ 0, & -i \end{Vmatrix}; \quad I_3' = \begin{Vmatrix} 0, & 1 \\ 0, & 0 \end{Vmatrix};$$

$$I_4' = \begin{Vmatrix} 0, & i \\ 0, & 0 \end{Vmatrix}; \quad I_5' = \begin{Vmatrix} 0, & 0 \\ 1, & 0 \end{Vmatrix}; \quad I_6' = \begin{Vmatrix} 0, & 0 \\ i, & 0 \end{Vmatrix}.$$

包含在关系 (208) 中的結构常数 $C_{pq}^{(j)}$，按照它們的定义，必須是实数，并可从下面几个关系式求出来

$$I_p'I_q' - I_q'I_p' = \sum_{j=1}^{6} C_{pq}^{(j)} I_j'$$

$$(p<q;\ p,\ q=1,\ 2,\ \cdots,\ 6).$$

同时应指出，矩陣 I'_j 之間并无实常数的綫性关系（除显易的，卽各系数全为零的情形以外），因此可得下列 15 个等式：

$$
\begin{array}{ll}
I'_1I'_3-I'_3I'_1=2I'_3, & I'_1I'_4-I'_4I'_1=2I'_4, \\
I'_2I'_3-I'_3I'_2=2I'_4, & I'_1I'_5-I'_5I'_1=-2I'_5, \\
I'_1I'_6-I'_6I'_1=-2I'_6, & I'_2I'_5-I'_5I'_2=-2I'_6, \\
I'_3I'_5-I'_5I'_3=I'_1, & I'_3I'_6-I'_6I'_3=I'_2, \\
I'_4I'_5-I'_5I'_4=I'_2, & I'_2I'_4-I'_4I'_2=-2I'_3, \\
I'_1I'_2-I'_2I'_1=0, & I'_2I'_6-I'_6I'_2=2I'_5, \\
I'_3I'_4-I'_4I'_3=0, & I'_4I'_6-I'_6I'_4=-I'_1, \\
I'_5I'_6-I'_6I'_5=0_{\circ} &
\end{array}
$$

对所求群的任一表示来說，若其无穷小变换是 $I_k(k=1, \cdots 6)$，那末这些变换之間有 15 个关系式：

$$I_pI_q-I_qI_p=\sum_{j=1}^{6}C_{pq}^{(j)}I_j,$$

如果我們引用下列的記号：

$$
\left.
\begin{array}{l}
I_3+iI_4=2A_1;\ I_5+iI_6=2A_2;\ I_1+iI_2=4A_3, \\
I_3-iI_4=2B_1;\ I_5-iI_6=2B_2;\ I_1-iI_2=4B_3\ _{\circ}
\end{array}
\right\} \tag{225}
$$

上述的 15 个关于式就可写为

$$A_pB_q-B_qA_p=0\quad (p,\ q=1,\ 2,\ 3), \tag{226}$$

以及下列六个关系：

$$
\left.
\begin{array}{l}
A_3A_1-A_1A_3=A_1, \\
A_3A_2-A_2A_3=-A_2, \\
A_1A_2-A_2A_1=2A_3;
\end{array}
\right\} \tag{227}
$$

$$
\left.
\begin{array}{l}
B_3B_1-B_1B_3=B_1, \\
B_3B_2-B_2B_3=-B_2, \\
B_1B_2-B_2B_1=2B_3\ _{\circ}
\end{array}
\right\} \tag{228}
$$

我們指出，若取矩陣为 I'_k，則关系式(226)与(227)是显然成立的，

因这时 $A'_k=0(k=1, 2, 3)$。关系式(227)与关系式(213)是一样的，而且前小节的討論基本上仍然有效。現在我們把上面的关系式用到群(223)的任意綫性表示的无穷小变换上。如果 v_j 为算子 A_3 的对应于最大特征值的特征矢量，则算子 A_3 具有 $(2j+1)$ 个特征矢量 $v_k(k=j, j-1, \cdots, -j+1, -j)$，当施以算子 A_1, A_2, A_3 时它們是按照公式(221)而变换的，而且 $v_{j+1}=0$ 与 $v_{-j-1}=0$。令 $L^{(j)}$ 为由算子 A_3 的对应于特征值 j 的所有特征矢量所組成的子空間，我們来表明，如果矢量 v 属于 $L^{(j)}$，則矢量 $B_q v(q=1, 2, 3)$ 也属于 $L^{(j)}$。实际上，由于(226)：

$$A_3(B_q v)=B_q(A_3 v)=B_q(jv)=jB_q v,$$

从而推出，$B_q v$ 是 A_3 的对应于特征值 j 的特征矢量(或零矢量)，就是説，$B_q v$ 属于 $L^{(j)}$。只要用算子 B_k 来替换 A_k，我們可以在 $L^{(j)}$ 内建立[85]的理論，因此在 $L^{(j)}$ 内可以作出一串矢量 $v_{jk'}(k'=j', j'-1, \cdots, -j'+1, -j')$，当以 j' 代替 j 与以 B_k 代替 A_k 时它們按照公式(221)而变换。当算子 A_2 两次作用在每个矢量 $v_{jk'}$ 时，由 $v_{jk'}$ 即可产生 $(2j+1)$ 个矢量 $v_{kk'}(k=j, j-1, \cdots, -j+1, -j)$。因而，我們最后得到 $(2j+1)(2j'+1)$ 个矢量 $v_{kk'}$，对于这些矢量下列关系成立：

$$\left.\begin{aligned}
A_1 v_{kk'}&=\sqrt{j(j+1)-k(k+1)}\,v_{k+1,k'},\\
A_2 v_{kk'}&=\sqrt{j(j+1)-k(k-1)}\,v_{k-1,k'},\\
A_3 v_{kk'}&=k v_{kk'},\\
B_1 v_{kk'}&=\sqrt{j(j+1)-k'(k'+1)}\,v_{k,k'+1},\\
B_2 v_{kk'}&=\sqrt{j(j+1)-k'(k'-1)}\,v_{k,k'-1},\\
B_3 v_{kk'}&=k' v_{kk'}。
\end{aligned}\right\} \tag{229}$$

这些公式在一个 $(2j+1)(2j'+1)$ 維空間內确定了算子 A_p 与 B_q，而且按照公式(225)进而确定算子 I_k，此后方程(204)可以导出唯一的一个群綫性表示。这就是我們在[80]曾經作出的那个表示。

在以上几小节中我們所作的說明系引自方得瓦 (Van der Waerden) 所作的"在量子力学中的群論方法"一书。

87. 輔助公式 現在回到[82]中的公式。我們有:

$$G_\beta G_\alpha = G_\gamma, \tag{230}$$

而且 γ_s 系按照用以确定基本群运算的公式(189)或(193)由 α_s 与 β_s 表达出来。我們来作一个依賴于变数 α_s 与 β_s，也就是依賴于群元素 G_α 与 G_β 的矩陣。用記号 $S(G_\beta, G_\alpha)$ 来表这个矩陣而它的元素系由下式来定义:

$$S_{ik}(G_\beta, G_\alpha) = \frac{\partial \gamma_i}{\partial \beta_k} \quad (i, k=1, 2, \cdots, r), \tag{231}$$

我們在[82]已經考察过这个矩陣当 $\beta_s=0$ 的情形，也就是当 $G_\beta=E$ 的情形，这里 E 为群单位元素。我們来研究这个矩陣的性质，从它的定义直接推出:

$$S(G_\beta, E) = I。 \tag{232}$$

我們还来証明下面的公式:

$$S(G_\beta, G_\alpha) \ S(E, G_\beta) = S(E, G_\beta G_\alpha)。 \tag{233}$$

令 $G_\alpha = G_{\alpha''} G_{\alpha'}$，遂有

$$G_\gamma = G_\beta G_\alpha = (G_\beta G_{\alpha''}) G_{\alpha'} = G_\delta G_{\alpha'} \quad (G_\delta = G_\beta G_{\alpha''})。$$

应用复合函数的微分法則,

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial \beta_k} = \sum_{s=1}^{r} \frac{\partial \gamma_i}{\partial \delta_s} \frac{\partial \delta_s}{\partial \beta_k} = \sum_{s=1}^{r} S_{is}(G_\delta, G_{\alpha'}) S_{sk}(G_{\beta'}, G_{\alpha''}),$$

由是有

$$S(G_\beta, G_{\alpha''} G_{\alpha'}) = S(G_\delta, G_{\alpha'}) S(G_\beta, G_{\alpha''})。$$

在这个等式中如令 $G_\beta = E$, $G_{\alpha''} = G_\beta$ 与 $G_{\alpha'} = G_\alpha$，卽得等式(233)。当 $G_\alpha = G_\beta^{-1}$，卽得矩陣 $S(E, G_\beta)$ 的逆矩陣的表达式:

$$S^{-1}(E, G_\beta) = S(G_\beta, G_\beta^{-1})。 \tag{234}$$

依照[82]中的記号，矩陣 $S(E, G_\beta)$ 是 $S(\beta_s)$ 而它的逆矩陣是 $T(\beta_s)$。現在用記号 $S(G_\beta)$ 与 $T(G_\beta)$ 来表这些矩陣:

$$S(E, G_\beta) = S(G_\beta); \quad S^{-1}(E, G_\beta) = T(G_\beta)。 \tag{235}$$

我們有

$$S(G_\beta) T(G_\beta) = T(G_\beta) S(G_\beta) = E。 \tag{236}$$

由公式(233)卽得:

$$S(G_\beta, G_\alpha) = S(E, G_\gamma) S^{-1}(E, G_\beta) = S(G_\gamma) S^{-1}(G_\beta), \tag{237}$$

因而关系(231)可写成下式:

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial \beta_k} = \sum_{s=1}^{r} S_{is}(G_\gamma) T_{sk}(G_\beta)。 \tag{238}$$

用 $T_{mi}(G_\gamma)$ 乘上面等式的两端，然后对 i 求和，由(236)卽得:

$$\sum_{i=1}^{r} T_{mi}(G_\gamma)\frac{\partial \gamma_i}{\partial \beta_k}=T_{mk}(G_\beta)。\tag{239}$$

求(238)对 β_l 的微商:

$$\frac{\partial^2\gamma_i}{\partial\beta_k\partial\beta_l}=\sum_{s,p=1}^{r}\frac{\partial S_{is}(G_\gamma)}{\partial\gamma_p}\frac{\partial\gamma_p}{\partial\beta_l}T_{sk}(G_\beta)+\sum_{s=1}^{r}S_{is}(G_\gamma)\frac{\partial T_{sk}(G_\beta)}{\partial\beta_l},$$

然后将 $\frac{\partial\gamma_p}{\partial\beta_l}$ 换成它的在公式(238)中的表达式,由是即

$$\frac{\partial^2\gamma_i}{\partial\beta_k\partial\beta_l}=\sum_{s,p,q=1}^{r}\frac{\partial S_{is}(G_\gamma)}{\partial\gamma_p}S_{pq}(G_\gamma)T_{ql}(G_\beta)T_{sk}(G_\beta)+\sum_{s=1}^{r}S_{is}(G_\gamma)\frac{\partial T_{sk}(G_\beta)}{\partial\beta_l}。$$

将等式右端的 k 与 l 对换，利用等式左端与微分的次序无关这一性质，而且将和数中的变数 s 与 q 对换,即得:

$$\sum_{s,p,q=1}^{r}\left[\frac{\partial S_{is}(G_\gamma)}{\partial\gamma_p}S_{pq}(G_\gamma)-\frac{\partial S_{iq}(G_\gamma)}{\partial\gamma_p}S_{ps}(G_\gamma)\right]T_{ql}(G_\beta)T_{sk}(G_\beta)=$$
$$=-\sum_{s=1}^{r}S_{is}(G_\gamma)\left[\frac{\partial T_{sk}(G_\beta)}{\partial\beta_l}-\frac{\partial T_{sl}(G_\beta)}{\partial\beta_k}\right]。$$

用积 $S_{lf}(G_\beta)S_{kg}(G_\beta)T_{hi}(G_\gamma)$ 乘此等式两端,然后对 i,k,l 从 1 到 r 求和。注意(236),于是得到等价的一組等式:

$$\sum_{i,p=1}^{r}\left[\frac{\partial S_{ig}(G_\gamma)}{\partial\gamma_p}S_{pf}(G_\gamma)-\frac{\partial S_{if}(G_\gamma)}{\partial\gamma_p}S_{pg}(G_\gamma)\right]T_{hi}(G_\gamma)=$$
$$=-\sum_{k,l=1}^{r}S_{lf}(G_\beta)S_{kg}(G_\beta)\left[\frac{\partial T_{hk}(G_\beta)}{\partial\beta_l}-\frac{\partial T_{hl}(G_\beta)}{\partial\beta_k}\right]。$$

因为,只要将这等式两端乘以积 $T_{fl_1}(G_\beta)T_{gk_1}(G_\beta)S_{i_1h}(G_\gamma)$，然后对 f,g,h 求和，就很容易从这些等式得到前面的等式,在最后那組等式的左端只与 γ_s 有关，而右端只与 β_s 有关。因此，由于在公式(230)中 α_s 的任意性，以及由此得出的 β_s 与 γ_s 的彼此独立性，最后等式的两端必須等于同一个常数,特别是:

$$\sum_{k,l=1}^{r}S_{lf}(G_\beta)S_{kg}(G_\beta)\left[\frac{\partial T_{hk}(G_\beta)}{\partial\beta_l}-\frac{\partial T_{hl}(G_\beta)}{\partial\beta_k}\right]=C_{fg}^{(h)}。$$

改换指标可以写成:

$$\sum_{s,t=1}^{r}S_{ti}(G_\alpha)S_{sk}(G_\alpha)\left[\frac{\partial T_{ps}(G_\alpha)}{\partial\alpha_t}-\frac{\partial T_{pt}(G_\alpha)}{\partial\alpha_s}\right]=-C_{ik}^{(p)}。\tag{240}$$

如果在这恒等式中令 $G_\alpha=E$，即 $\alpha_s=0(s=1,\cdots,r)$ 而且注意 $S(E)=E$，于是得到:

$$-C_{ik}^{(p)}=\left[\frac{\partial T_{pk}(G_\alpha)}{\partial\alpha_i}-\frac{\partial T_{pi}(G_\alpha)}{\partial\alpha_k}\right]。$$

将此与 [82] 中公式 (199) 加以比较,我們看出,这里的 $C_{ik}^{(p)}$ 就是以前定义的結构常数。用 $T_{il}(G_\alpha)T_{km}(G_\alpha)$ 乘(240)的两端,然后对 i 与 k 作和数,利用(236)即得:

$$\frac{\partial T_{pm}(G_\alpha)}{\partial\alpha_l}-\frac{\partial T_{pl}(G_\alpha)}{\partial\alpha_m}=-\sum_{i,k=1}^{r}C_{ik}^{(p)}T_{il}(G_\alpha)T_{km}(G_\alpha)。\tag{241}$$

现在回到公式(207)与(208),公式(208)系将公式(207)中的方括弧在 $\alpha_s=0(s=1,\cdots,$

r) 的情形下使等于零而得到的，利用(241)，我們容易証明，从(208)推出，公式(207)中的方括弧对于任意的 α_s 等于零。

該括弧中的第二項可以改变成

$$\sum_{j,k=1}^{r} T_{jp}T_{kq}I_jI_k - \sum_{j,k=1}^{r} T_{jq}T_{kp}I_jI_k,$$

此时我們不必写出 T 中的元 G_α，在被减数中将 j 与 k 对换，于是得到:

$$\sum_{j,k=1}^{r} T_{jp}T_{kq}(I_jI_k - I_kI_j) = \sum_{j,k,s=1}^{r} T_{jp}T_{kq}C_{pq}^{(s)}I_s。$$

当把公式(207)的括弧中的第一項:

$$\sum_{j=1}^{r}\left(\frac{\partial T_{jp}}{\partial \alpha_q} - \frac{\partial T_{jq}}{\partial \alpha_p}\right)I_j$$

按照(241)加以变换时，我們直接得到只差一个符号的同样的結果。与矩陣 $S(G_\beta, G_\alpha)$ 同时，我們来考察其元素系由下列公式定义的矩陣 $S'(G_\beta, G_\alpha)$:

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_k} = S'(G_\beta, G_\alpha)。\tag{242}$$

与上完全一样可以証明下列的公式:

$$\left.\begin{aligned} &S'(E, G_\alpha) = I, \\ &S'(G_\beta G_\alpha, E) = S'(G_\beta, G_\alpha)S'(G_\alpha, E), \\ &S'^{-1}(G_\alpha, E) = S'(G_\alpha^{-1}, G_\alpha)。\end{aligned}\right\}\tag{243}$$

这些公式以后对我們是需要的。

88. 根据結构常数来建立群　在这一小节我們将概括地来討論一下根据給定的結构常数 $C_{ik}^{(l)}$ 来建立群的运算以及綫性变换群的問題，所給的結构常数当然适合关系式 (194_1) 和 (194_2)。这个建立的方法是基于偏微分方程論中的一个定理，这个定理在上面我們已經提起过。現在我們来叙述这个定理。

假設我們有了下面这样一組偏微分方程:

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_k} = X_{ik}(x_1, \cdots, x_n; z_1, \cdots, z_m) \quad (i=1, 2, \cdots, m;\ k=1, 2, \cdots, n),\tag{244}$$

利用这个方程組，我們来写出下面这个条件

$$\frac{\partial^2 z_i}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial^2 z_i}{\partial x_l \partial x_k}。$$

显然，上式的形状是:

$$\frac{\partial X_{ik}}{\partial x_l} + \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial X_{ik}}{\partial z_s}\frac{\partial z_s}{\partial x_l} = \frac{\partial X_{il}}{\partial x_k} + \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial X_{il}}{\partial z_s}\frac{\partial z_s}{\partial x_k},$$

或者，用方程組(244)替换 $\frac{\partial z_s}{\partial x_l}$ 和 $\frac{\partial z_s}{\partial x_k}$:

$$\frac{\partial X_{ik}}{\partial x_l} + \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial X_{ik}}{\partial z_s}X_{sl} = \frac{\partial X_{il}}{\partial x_k} + \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial X_{il}}{\partial z_s}X_{sk} \quad (k \neq l)\tag{245}$$

这个等式是变数 x_k, z_i 之間的关系。

定理　如果函数 X_{ik} 在 $x_k=x_k^{(0)}$, $z_l=z_l^{(0)}$ 的一个邻域中(包括这一点本身)連續并有連續的偏微商，这些偏微商就是出現在关系式(245)中的，并且所有的关系式(245)对于 x_k, z_l 都恒等地成立，那么方程組(244)对于初始条件

$$z_l\Big|_{x_k=x_k^{(0)}}=z_l^{(0)}$$

有解，并且是唯一的。

在上面所說的連續性条件之下，所有的关系式(245)恒等地成立，这个通常叫做方程組(244)的完全可积性条件。現在我們来描述一下根据給定的結构常数来建立群的运算以及綫性变换群的步驟。

假設給定了常数 $C_{ik}^{(p)}$，这里 $i, k, p=1, 2, \cdots$，并且这些常数适合关系式(194_1)和(194_2)。

如果对于偏微商来解出方程組(241)，那么可以驗証，上面所說的关系式就是方程組(241)的完全可积性条件。因之存在一个唯一的以 $T_{pq}(G_\alpha)$ $(p, q=1, 2, \cdots, r)$ 为元素的矩陣 $T(G_\alpha)$，当 $G_\alpha=E$，也就是当 $\alpha_s=0(s=1, 2, \cdots, r)$ 时，这个矩陣就变成单位矩陣，并且它适合方程組(241)。在有了 $T(G_\alpha)$ 之后，我們就可以作逆矩陣 $S(G_\alpha)=T^{-1}(G_\alpha)$。为了建立群的运算我們回到方程組(238)。这些方程的右边是 β_s 和 $\gamma_s(s=1, 2, \cdots, r)$ 的已知函数。可以驗証，方程組(241)正好表达了方程組(238)的完全可积性条件。因之方程組(238)有一个唯一的解，它滿足初始条件

$$\gamma_l\big|_{\beta_k=0}=\alpha_l\ 。$$

这样做出的解就給出了群的运算。初始条件是表示这样一个事实，即当 $\beta_s=0(s=1, 2, \cdots, r)$ 时，由公式(230)定义的元素 G_γ 就变成了 G_α。現在我們轉入綫性变换群的建立，也就是說，根据結构常数来建立已知阶的矩陣群，这里如上面所指出的，我們是已經有了矩陣 $T(G_\alpha)$。在[83]中我們已經証明过，方程組(204)或者(205)的完全可积性条件就是方程(207)中的方括弧对任意的指标都恒等于零，同时在[87]中我們証明了，如果矩陣 I_s 适合关系式(208)，那么就滿足上面的条件。这样一来，解决这个問題就应該由作出給定阶的并且适合关系式(208)的矩陣 I_s 开始。这是一个复杂的代数問題。在有了矩陣 I_s 之后，我們就可以断言，方程組(205)有唯一的解，它滿足初始条件(206)。这个解給出了带有給定的結构常数 $C_{ik}^{(p)}$ 的矩陣群。

可以証明，在初始条件 $T(E)=I$ 之下，方程組(241)的积分归結为一个常系数綫性常微分方程組的积分。我們来叙述这个結果。我們作下面这个常系数綫性常微分方程組：

$$\frac{dw_{ik}(t)}{dt}=\delta_{ik}+\sum_{p,q=1}^{r}C_{pq}^{(i)}\alpha_p w_{qk}(t),$$

这里 $\delta_{ik}=0$ 当 $i\neq k$，$\delta_{ii}=1$，并且 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 看作給定的常数。这样，函数 $T_{ik}(\alpha)=w_{ik}(1)$ 就适合方程組(241)以及初始条件 $T(E)=I$。关于根据給定的結构

常数来建立連續群問題的詳尽的研究以及連續群論中其他問題的討論可以参看 Л. С. Понтрягин 的"連續群論"。

89. 群上的积分 在[76, 77]中我們証明过一系列的关系式，其中含有一些依賴于群的元素的数量的和，并且是对群全部的元素求和。在連續群的情形，求和要以对于定义群的元素的参数的积分来代替。假設 G 是一个連續群，在某一个参数的选擇下，这些参数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 在实 r 維空間 T_r 中对应一个有界的閉域 V (域加上它的边界)，并且对应于 G 的每个元素有 V 的一个确定的点，反过来也如此。在域 V 内定义群运算的函数 $\varphi_j(\beta_1, \cdots, \beta_r, \alpha_1, \cdots, \alpha_r)$ 假定是連續的并可以微分足够多次。此外，再假定这些函数和它們的微商直到 V 的边界都連續。对应于元素 G_α^{-1} 的参数 $\tilde{\alpha}_s$ 对于 α_s 的依賴关系也假定是連續的。带有这一些性质的群通常称为紧致的。为了定义群上的积分我們来考慮矩陣 $S'(G_\beta, G_\alpha)$[87]的行列式，并为它引入下面的符号：

$$\Delta'(G_\beta, G_\alpha) = \left|\frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_k}\right|_1^r。\tag{246}$$

由(243)直接得出

$$\Delta'(E, G_\alpha) = 1,\tag{247$_1$}$$

$$\Delta'(G_\beta G_\alpha, E) = \Delta'(G_\beta, G_\alpha)\cdot\Delta'(G_\alpha, E)。\tag{247$_2$}$$

令 $\delta'(G_\beta) = \Delta'(G_\beta, E)$，我們可以写：

$$\Delta'(G_\beta, G_\alpha) = \frac{\delta'(G_\beta G_\alpha)}{\delta'(G_\alpha)}。\tag{248}$$

注意到 $\delta'(E) = \Delta'(E, E) = 1$，由上面的式子得到：

$$\Delta'(G_\alpha^{-1}, G_\alpha) = \frac{1}{\delta'(G_\alpha)}。\tag{249}$$

我們再引进一个符号：

$$u'(G_\alpha) = \Delta'(G_\alpha^{-1}, G_\alpha)。\tag{250}$$

根据上面所做的假定，$u'(G_\alpha)$ 在閉域 V 上是一个連續函数。它不能变成零，因为

$$\frac{1}{u'(G_\alpha)} = \delta'(G_\alpha) = \Delta'(G_\alpha, E)$$

也是一个連續函数。如果注意到 $u'(E) = 1$，我們可以断定，$u'(G_\alpha)$ 和 $\delta(G_\alpha)$ 都是正函数。根据(248)对于 $\Delta'(G_\beta, G_\alpha)$ 也可以如此断定。

假設 $f(G_\alpha) = f(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$ 是閉域 V 上一个任意的連續函数。

我們按下面的公式来定义这个函数在群 G 上的积分

$$\int_G f(G_\alpha)dG_\alpha = \int_V f(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)u'(G_\alpha)d\alpha_1\cdots d\alpha_r,\tag{251}$$

这里右边的积分就是域 V 上通常的积分。我們来証明，这样的积分有下面的左不变性：

$$\int_G f(G_\alpha)dG_\alpha = \int_G f(G_\beta G_\alpha)dG_\alpha,\tag{252}$$

或者写成坐标形式

$$\int_V f(\alpha_1, \cdots, \alpha_r) u'(G_\alpha) d\alpha_1 \cdots d\alpha_r = \int_V f(\gamma_1, \cdots, \gamma_r) u'(G_\alpha) d\alpha_1 \cdots d\alpha_r, \quad (253)$$

这里 G_β 是群 G 中任一个固定的元素。为了証明这个式子，在左边的积分中用变元素 G_δ 来替换变元素 G_α，令 $G_\alpha = G_\beta G_\delta$，这里参数 $\delta_1, \cdots, \delta_r$ 的变动区域仍为 V。变换的行列式是

$$\left|\frac{\partial\alpha_i}{\partial\delta_k}\right|_1^r = \Delta'(G_\beta, G_\delta) = \frac{\delta'(G_\beta G_\delta)}{\delta'(G_\delta)} = \frac{u'(G_\delta)}{u'(G_\beta G_\delta)} = \frac{u'(G_\delta)}{u'(G_\alpha)},$$

我們得到：

$$\int_V f(\alpha_1, \cdots, \alpha_r) u'(G_\alpha) d\alpha_1 \cdots d\alpha_r = \int_V f(\alpha_1, \cdots, \alpha_r) u'(G_\alpha) \frac{u'(G_\delta)}{u'(G_\alpha)} d\delta_1 \cdots d\delta_r =$$

$$= \int_G f(G_\beta G_\delta) dG_\delta \text{。}$$

这个就和(253)重合。在右边以 G_δ 替换 G_α 是无关紧要的。

相仿地，可以建立右不变积分。我們引入矩陣 $S(G_\beta, G_\alpha)$ 的行列式：

$$\Delta(G_\beta, G_\alpha) = \left|\frac{\partial\gamma_i}{\partial\beta_k}\right|_1^r \text{。} \quad (254)$$

和以上一样，我們有

$$\Delta(G_\alpha, E) = 1$$

$$\Delta(E, G_\beta G_\alpha) = \Delta(G_\beta, G_\alpha)\Delta(E, G_\beta) \quad (255)$$

$$\Delta(G_\beta, G_\alpha) = \frac{\delta(G_\beta G_\alpha)}{\delta(G_\beta)}, \text{ 这里 } \delta(G_\alpha) = \Delta(E, G_\alpha)\text{。}$$

引入正函数

$$u(G_\alpha) = \frac{1}{\delta(G_\alpha)} = \Delta(G_\alpha, G_\alpha^{-1}) \quad (256)$$

并定义积分

$$\int_V f(\alpha_1, \cdots, \alpha_r) u(G_\alpha) d\alpha_1 \cdots d\alpha_r = \int_G f(G_\alpha) \widetilde{d G}_\alpha \quad (257)$$

微分上的波形符号是区别这个积分和积分(251)。

在这里积分的右不变性成立：

$$\int_G f(G_\alpha) \widetilde{dG}_\alpha = \int_G f(G_\alpha G_\beta) \widetilde{dG}_\alpha \text{。} \quad (258)$$

我們現在要来証明，如果把积分号下函数中的 G_α 换成 G_α^{-1}，左不变积分就变成了右不变积分，反过来也如此。把写成参数式的等式 $G_\lambda = G_\alpha G_\beta$ 对 α_s 微分，并且在以后所有的公式中都假定 $G_\beta = G_\alpha^{-1}$：

$$\frac{\partial\lambda_i}{\partial\alpha_k} + \sum_{s=1}^r \frac{\partial\lambda_i}{\partial\beta_s} \cdot \frac{\partial\beta_s}{\partial\alpha_k} = 0,$$

由此得

$$\left|\frac{\partial\lambda_i}{\partial\alpha_k}\right|_1^r = (-1)^r \left|\frac{\partial\lambda_i}{\partial\beta_k}\right|_1^r \left|\frac{\partial\beta_i}{\partial\alpha_k}\right|_1^r,$$

再利用(246)和(254)，得

$$\left|\frac{\partial\beta_i}{\partial\alpha_k}\right|_1^r=(-1)^r\frac{\Delta(G_\alpha,G_\alpha^{-1})}{\Delta'(G_\alpha,G_\alpha^{-1})}=(-1)^r\frac{u(G_\alpha)}{u'(G_\alpha^{-1})}。\tag{259}$$

可以給出这个行列式的另一种表示。由等式

$$\left|\frac{\partial\beta_i}{\partial\alpha_k}\right|_1^r\left|\frac{\partial\alpha_i}{\partial\beta_k}\right|_1^r=1$$

得

$$\left|\frac{\partial\alpha_i}{\partial\beta_k}\right|_1^r=(-1)^r\frac{u'(G_\alpha^{-1})}{u(G_\alpha)}\tag{260}$$

或者，交换 G_α 和 G_α^{-1} 的位置：

$$\left|\frac{\partial\beta_i}{\partial\alpha_k}\right|_1^r=(-1)^r\frac{u'(G_\alpha)}{u(G_\alpha^{-1})}。\tag{261}$$

现在回到积分，按通常的办法换积分变数，并且利用(260)：

$$\int_V f(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)u'(G_\alpha)d\alpha_1\cdots d\alpha_r=\int_V f(\tilde\beta_1,\cdots,\tilde\beta_r)u'(G_\alpha)\left|\left|\frac{\partial\alpha_i}{\partial\beta_k}\right|_1^r\right|d\beta_1\cdots d\beta_r=$$

$$=\int_V f(\tilde\beta_1,\cdots,\tilde\beta_r)u'(G_\alpha)\frac{u(G_\beta)}{u'(G_\alpha)}d\beta_1\cdots d\beta_r。$$

消去 $u'(G_\alpha)$，再把变元素 G_β 换成变元素 G_α，得

$$\int_V f(\tilde\alpha_1,\cdots,\tilde\alpha_r)u(G_\alpha)d\alpha_1\cdots d\alpha_\gamma=\int_V f(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)u'(G_\alpha)d\alpha_1\cdots d\alpha_r。\tag{262}$$

完全相同地，利用公式(261)即得：

$$\int_V f(\tilde\alpha_1,\cdots,\tilde\alpha_\gamma)u'(G_\alpha)d\alpha_1\cdots d\alpha_r=\int_V f(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)u(G_\alpha)d\alpha_1\cdots d\alpha_r。\tag{263}$$

直到目前为止我們沒有用到群的紧致性。区域 V 可以是无限的。不过这样就必須对函数 $f(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$ 作一些假定使所有写出的积分都有意义。现在利用紧致性我們来証明 $u(G_\alpha)=u'(G_\alpha)$。为了这个目的我們来考虑行列式

$$D(G_\beta,G_\alpha)=\left|\frac{\partial\mu_i}{\partial\beta_k}\right|_1^r,\tag{264}$$

这里 $G_\mu=G_\alpha^{-1}G_\beta G_\alpha$，并来証明公式

$$D(G_\beta,G_{\alpha''}G_{\alpha'})=D(G_{\alpha''}^{-1}G_\beta G_{\alpha''},G_{\alpha'})D(G_\beta,G_{\alpha''})。\tag{265}$$

我們可以写

$$G_\mu=(G_{\alpha''}G_{\alpha'})^{-1}G_\beta(G_{\alpha''}G_{\alpha'})=G_{\alpha'}^{-1}G_\nu G_{\alpha'},$$

这里 $G_\nu=G_{\alpha''}^{-1}G_\beta G_{\alpha''}$，因为

$$\left|\frac{\partial\mu_i}{\partial\beta_k}\right|_1^r=\left|\frac{\partial\mu_i}{\partial\nu_k}\right|_1^r\left|\frac{\partial\nu_i}{\partial\beta_k}\right|_1^r=D(G_\nu,G_{\alpha'})D(G_\beta,G_{\alpha''}),$$

由此即得(265)。在这个公式中假定 $G_\beta=E$，得

$$D(E,G_{\alpha''}G_{\alpha'})=D(E,G_{\alpha'})D(E,G_{\alpha''})。\tag{266}$$

如果我們引入元素的一个数值函数：

$$\eta(G_\alpha)=D(E, G_\alpha) \tag{267}$$

那么根据(266)可以写成：

$$\eta(G_{\alpha''}G_{\alpha'})=\eta(G_{\alpha''})\eta(G_{\alpha'}), \tag{268}$$

这就是說，元素的相乘对应于相应函数值 $\eta(G_\alpha)$ 的相乘。显然我們有：

$$\eta(E)=1 \text{ 和 } \eta(G_\alpha)\eta(G_\alpha^{-1})=1 \tag{269}$$

并且函数 $\eta(G_\alpha)$ 在区域 V 上是連續的和正的。利用群的紧致性，現在我們来証明对于任何元素 G_α, $\eta(G_\alpha)=1$。假設对于某一个元素 G_α 我們有 $\eta(G_\alpha)\neq 1$。譬如說，如果 $\eta(G_\alpha)<1$，那么根据 (269)：$\eta(G_\alpha^{-1})>1$，因此我們总可以认为 $\eta(G_\alpha)>1$。在这个情形下

$$\eta(G_\alpha^n)=[\eta(G_\alpha)]^n\to\infty \text{ 当 } n\to\infty。$$

这个和在閉域 V 上連續的函数 $\eta(G_\alpha)$ 一定有界这件事实抵触。現在我們来建立 $u(G_\alpha)$ 和 $u'(G_\alpha)$ 之間的关系。設

$$G_\gamma=G_\beta G_\alpha=G_\alpha^{-1}(G_\alpha G_\beta)G_\alpha=G_\alpha^{-1}G_\rho G_\alpha \quad (G_\rho=G_\alpha G_\beta)。$$

我們有：

$$\left|\frac{\partial\gamma_i}{\partial\beta_k}\right|_1^r=\Delta(G_\beta, G_\alpha)。$$

不过在另一方面：

$$\left|\frac{\partial\gamma_i}{\partial\beta_k}\right|_1^r=\left|\frac{\partial\gamma_i}{\partial\rho_k}\right|_1^r\left|\frac{\partial\rho_i}{\partial\beta_k}\right|_1^r=D(G_\rho, G_\alpha)\Delta'(G_\alpha, G_\beta),$$

即

$$\Delta(G_\beta, G_\alpha)=D(G_\alpha G_\beta, G_\alpha)\cdot\Delta'(G_\alpha, G_\beta)。$$

令 $G_\beta=G_\alpha^{-1}$，即得

$$\Delta(G_\alpha^{-1}, G_\alpha)=D(E, G_\alpha)\cdot\Delta'(G_\alpha, G_\alpha^{-1}),$$

这就是

$$u(G_\alpha^{-1})=\eta(G_\alpha)u'(G_\alpha^{-1})$$

或者

$$u(G_\alpha^{-1})=u'(G_\alpha^{-1}),$$

因为对任何 G_α, $\eta(G_\alpha)=1$。因之，对于紧致的群左不变积分 (251) 与右不变积分 (257)重合。除此之外，由(262)和(263)知道这个积分和积分

$$\int_V f(\tilde\alpha_1, \cdots, \tilde\alpha_r)u'(G_\alpha)d\alpha_1\cdots d\alpha_r$$

也是一样的。对于非紧致的群左不变积分可以不同于右不变积分。作为一个例子我們来看下面这种形式的綫性变换群：

$$z'=e^{\alpha_1}z+\alpha_2,$$

这里 α_1 和 α_2 从 $(-\infty)$ 变到 $(+\infty)$。在这个情形 $r=2$，V 是整个的平面。結合两个变换給出：

$$z'=e^{\alpha_1}z+\alpha_2;\ z''=e^{\beta_1}z'+\beta_2;$$

$$z''=e^{\beta_1+\alpha_1}z+(e^{\beta_1}\alpha_2+\beta_2),$$

这就是說

$$\gamma_1=\varphi_1(\beta_1, \beta_2;\alpha_1, \alpha_2)=\beta_1+\alpha_1;$$

$$\gamma_2=\varphi_2(\beta_1, \beta_2;\alpha_1, \alpha_2)=e^{\alpha_1}\beta_2+\alpha_2。$$

参数 $\alpha_1=\alpha_2=0$ 对应于单位元素。元素 G_α^{-1} 的参数是 $\tilde{\alpha}_1=-\alpha_1$, $\tilde{\alpha}_2=-\alpha_2 e^{-\alpha_1}$。我們来計算函数行列式：

$$\Delta'(G_\beta, G_\alpha)=\begin{vmatrix}1, & 0\\ 0, & e^{\alpha_1}\end{vmatrix}=e^{\alpha_1};\delta'(G_\alpha)=e^{\alpha_1};u'(G_\alpha)=e^{-\alpha_1}$$

$$\Delta(G_\beta, G_\alpha)=\begin{vmatrix}1, & e^{\alpha_1}\beta_2\\ 0, & 1\end{vmatrix}=1;\delta(G_\alpha)=u(G_\alpha)=1。$$

左不变积分是
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha_1, \alpha_2)e^{-\alpha_1}d\alpha_1 d\alpha_2$$

右不变积分是
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha_1, \alpha_2)d\alpha_1 d\alpha_2。$$

应該指出，为了証明右不变积分与左不变积分相等，也就是等式 $u(G_\alpha)=u'(G_\alpha)$，我們可以用其他的条件来代替群的紧致性的条件。

設 G' 是一个子群，它由 G 的形式为

$$G_\alpha G_\beta G_\alpha^{-1} G_\beta^{-1} \qquad (270)$$

的元素或者由这些元素經乘法所得出的元素所組成，这里 G_α 和 G_β 是 G 的任意元素。

不难看出，如果元素 G_γ 是元素(270)中的一个，那么它的逆元素 G_γ^{-1} 也是。

同样地，对于 G 中的任意元素G_δ，元素 $G_\delta^{-1}G_\gamma G_\delta$ 也是元素 (270) 中的一个。换句話說，G' 是由元素 (270) 所生成的。由上面所說的可以推知，G' 是 G 的一个正規子群。子群 G' 归結成单个的单位元素在而且仅在所有的元素 (270) 都是单位元素的情形，也就是說，当 G 是一个阿倍尔群。子群 G' 也可以和 G 重合。特别地，如果 G 是一个非交换的单純群时，G' 和 G 重合。子群 G' 通常叫做群 G 的交换子群。

由定义(268)和(269)得知，$\eta(G_\alpha G_\beta G_\alpha^{-1} G_\beta^{-1})=1$，对 G' 中所有的 G_γ，$\eta(G_\gamma)=1$，并且 $\eta(G_\alpha)$ 对于所有的属于同一个按子群 G' 分成的集合的元素取相同的值，这就是說，函数 $\eta(G_\alpha)$ 对于 G' 的商群的每个元素有确定的值。如果 G' 和 G 重合，那么对于 G 的任何元素 G_α 有$\eta(G_\alpha)=1$。如果上面所說的商群是紧致的，情形也是如此。既然

$$\eta(G_\alpha)=1,$$

那么就有
$$u(G_\alpha)=u'(G_\alpha)。$$

90. 正交性质例子　在有限群里，对于一个变元素 G_s 和一个固定的元素 G_t，乘积 G_sG_t 或者 G_tG_s 取群内所有的元素，且各取一次，上一节所討論的积分的左不变性和右不变性和这个性质相仿。对于有限群，在証明每一个群的表示都等价于一个 U 表示以及証明它們的正交性时我們就利用了上面这个性质。利用不变积分，对于紧致的群我們也可以証明相仿的命題。如果 $A(G_\alpha)$ 是 U 矩陣，它給出紧致的群 G 的一个不可約的綫性表示，$B(G_\alpha)$ 也是 U 矩陣，它給出另一个不等价的不可約表示，和平常一样，我們以两个下标来表示矩陣的元素，那么我們就有以下的公式，它表示出互不等价的不可約 U 表示的正交性：

$$\int_V \{A(G_\alpha)\}_{ij}\{B(G_\alpha)\}_{kl}u(G_\alpha)d\alpha_1\cdots d\alpha_r=0\text{。} \tag{271}$$

对于一个不可約的表示我們有:

$$\int_V \{A(G_\alpha)\}_{ij}\{\overline{A(G_\alpha)}\}_{kl}u(G_\alpha)d\alpha_1\cdot d\alpha_r=\frac{\delta_{ik}\delta_{jl}}{p}\int_V u(G_\alpha)d\alpha_1\cdot d\alpha_r, \tag{272}$$

这里 p 是矩陣的阶。对于品格

$$X(G_\alpha)=\sum_{i=1}^{p}\{A(G_\alpha)\}_{ii},$$

$$X'(G_\alpha)=\sum_{i=1}^{q}\{B(G_\alpha)\}_{ii},$$

这里 p 和 q 是矩陣 $A(G_\alpha)$ 和 $B(G_\alpha)$ 的阶，同样地，下面的性质成立

$$\int_V X(G_\alpha)\overline{X'(G_\alpha)}u(G_\alpha)d\alpha_1\cdot d\alpha_r=0, \tag{273}$$

$$\int_V X(G_\alpha)\overline{X(G_\alpha)}u(G_\alpha)d\alpha_1\cdot d\alpha_r=\int_V u(G_\alpha)d\alpha_1\cdot d\alpha_r\text{。} \tag{274}$$

1. 我們来看几个例子。設 G 是平面上繞原点轉动的阿倍尔群。对于它 $r=1$，唯一的参数 α 給出轉动的角度。我們认定 α 是属于区間 $(0, 2\pi)$，并且把区間的两端等同起来。相继地轉动角 α 和角 β 相当于轉动角 $\alpha+\beta$，有时候为了使加得的和仍属于区間 $(0, 2\pi)$，需要减去 2π。在这个情形，函数行列式 $\Delta(G_\beta, G_\alpha)$ 和 $\Delta'(G_\beta, G_\alpha)$ 归結成 $\beta+\alpha$ 对 β 或者 α 的微商，因而等于 1，所以 $u(G_\alpha)=u'(G_\alpha)=1$。我們知道，群 G 有一級不可約的 U 表示 $e^{im\alpha}(m=0, \pm1, \pm2, \cdots)$，并且公式(273)和(274)給出我們所熟知的公式:

$$\int_0^{2\pi} e^{im_1\alpha}\overline{e^{im_2\alpha}}d\alpha=\int_0^{2\pi} e^{i(m_1-m_2)\alpha}d\alpha=\begin{cases}0 & \text{当 } m_1\neq m_2\\ 2\pi & \text{当 } m_1=m_2\text{。}\end{cases} \tag{275}$$

应該指出，由于要使和 $\beta+\alpha$ 始終在区間 $(0, 2\pi)$ 上，在 α 和 β 都在区間 $(0, 2\pi)$ 内而它們的和等于 2π 的情形，这个和的連續性和微商需要做一些特别的說明。

2. 我們来考虑三維空間的轉动群，并將取与 [84] 中所談的有一些不同的参数。假設空間繞一根軸轉动角度 ω，而这根軸与坐标軸 X, Y 和 Z 所成的角是 α, β, 和 γ。

我們引入四个参数，

$$\left.\begin{aligned}a_0&=\cos\frac{1}{2}\omega;\\ a_1&=\cos\alpha\sin\frac{1}{2}\omega;\\ a_2&=\cos\beta\sin\frac{1}{2}\omega;\\ a_3&=\cos\gamma\sin\frac{1}{2}\omega\text{。}\end{aligned}\right\} \tag{276}$$

它們被关系式

$$a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2=1 \tag{277}$$

联系着。数值 $a_0=1$, $a_1=a_2=a_3=0$ 对应于单位变换。我們可以取 a_1, a_2, a_3 作为参数。把 a_0 看作它們的函数。

如果相继施行两个轉动，它們被参数 (a_0, a_1, a_2, a_3) 和 (b_0, b_1, b_2, b_3) 确定，那么不难驗証，結果所得的轉动的参数 (c_0, c_1, c_2, c_3) 是被以下的公式决定：

$$\left.\begin{aligned} c_0&=a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3,\\ c_1&=a_0b_1+a_1b_0+a_2b_3-a_3b_2,\\ c_2&=a_0b_2-a_1b_3+a_2b_0+a_3b_1,\\ c_3&=a_0b_3+a_1b_2-a_2b_1+a_3b_0。\end{aligned}\right\} \tag{278}$$

把 a_0 看作 a_1, a_2, a_3 的函数，根据(277)得：

$$a_0\frac{\partial a_0}{\partial a_j}+a_j=0 \qquad (j=1, 2, 3),$$

从而对于 E, $\frac{\partial a_0}{\partial a_j}=0$。利用这一点，我們可以很容易地得出当 $b_0=1$, $b_1=b_2=b_3=0$ 时的函数行列式：

$$\frac{D(c_1, c_2, c_3)}{D(b_1, b_2, b_3)}=\begin{vmatrix} a_0, & -a_3, & a_2\\ a_3, & a_0, & -a_1\\ -a_2, & a_1, & a_0\end{vmatrix}=a_0(a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2)=$$

$$=a_0=\sqrt{1-a_1^2-a_2^2-a_3^2}。$$

不变积分就是：

$$\int_V f(a_1, a_2, a_3)\frac{1}{\sqrt{1-a_1^2-a_2^2-a_3^2}}da_1\, da_2\, da_3。 \tag{279}$$

区域 V 是半徑为 1 以原点为中心的球。应該指出，公式(278)可以直接由四元数的乘法規則得出

$$c_0+c_1i+c_2j+c_3k=(a_0+a_1i+a_2j+a_3k)(b_0+b_1i+b_2j+b_3k),$$

这里单位 i, j 和 k 服从下面的乘法規則：

$$i^2=j^2=k^2=-1;$$

$$ij=-ji=k;$$

$$jk=-kj=i;$$

$$ki=-ik=j。$$

不难建立参数 (a_0, a_1, a_2, a_3) 与尤拉角 α, β, γ 之間的关系。相当的公式是

$$a_0=\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma);$$

$$a_1=\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}(\gamma-\alpha);$$

$$a_2=\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha);$$

$$a_3=\cos\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)。$$

对于参数 (α, β, γ) 不变积分的形式为：

$$\int_V f(\alpha, \beta, \gamma)\sin\beta\sin^2\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)d\alpha\, d\beta\, d\gamma, \tag{280}$$

这里 $0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi$, $0\leqslant\beta<\pi$, $0\leqslant\gamma<2\pi$。应該指出，在积分(279)中，如果 $\omega=\pi$，函数

$$\frac{1}{a_0}=\frac{1}{\sqrt{1-a_1^2-a_2^2-a_3^2}}$$

变成无限大。这是由于在公式(276)中 a_1, a_2, a_3 含有 $\sin\frac{1}{2}\omega$。这里应該指出，在[69]中在定义紧致性时所談到的那些性质只对于参数的某些选擇是滿足的。在改变了参数之后这些性质可能就丧失了。此外，对于三維空間的轉动群，連續性和微商的定义有一些特殊性，这一点在上一个例子的最后說到平面上繞原点的轉动群时已經提到过。

再有一点应該指出，对于空間的轉动群，两种不变积分是相同的这一点可以由它是一个非交换的单純群这件事实直接得出。

3．对于劳倫次群，根据直接計算不难驗証左不变积分和右不变积分是重合的，我們知道，劳倫次群是准同构于行列式为1的綫性变换群：

$$\begin{aligned} x_1'&=a_0x_1+a_1x_2\\ x_2'&=a_2x_1+a_3x_2。\end{aligned}\quad (a_0a_3-a_1a_2=1) \tag{281}$$

数值 $a_0=a_3=1$, $a_1=a_2=0$ 对应于单位元素。可以把 a_0 看作 a_1, a_2, a_3 的函数，并取 a_1, a_2 和 a_3 的实数和虚数部分作为参数。群的运算就是二阶矩陣的乘法，我們有：

$$\left.\begin{aligned} c_0&=b_0a_0+b_1a_2,\\ c_1&=b_0a_1+b_1a_3,\\ c_2&=b_2a_0+b_3a_2,\\ c_3&=b_2a_1+b_3a_3。\end{aligned}\right\} \tag{282}$$

如果假定 $a_k=\alpha_k'+i\alpha_k''(k=0, 1, 2, 3)$，那么 $\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3', \alpha_1'', \alpha_2'', \alpha_3''$ 就是群的参数，再假定 $b_k=\beta_k'+i\beta_k''$ 和 $c_k=\gamma_k'+i\gamma_k''$，为了定义不变积分我們必須計算函数行列式：

$$\frac{D(\gamma_1', \gamma_2', \gamma_3', \gamma_1'', \gamma_2'', \gamma_3'')}{D(\beta_1', \beta_2', \beta_3', \beta_1'', \beta_2'', \beta_3'')}\ \text{当}\ \beta_1'=\beta_2'=\beta_1''=\beta_2''=\beta_3''=0;\ \beta_3'=1$$

或者

$$\frac{D(\gamma_1', \gamma_2', \gamma_3', \gamma_1'', \gamma_2'', \gamma_3'')}{D(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3', \alpha_1'', \alpha_2'', \alpha_3'')}\ \text{当}\ \alpha_1'=\alpha_2'=\alpha_1''=\alpha_2''=\alpha_3''=0;\alpha_3'=1,$$

这里对应于恒等变换的是 $\alpha_3'=1$ 而不全是零，这件事实是无关紧要的。在两种情形下，我們得到同一个不变积分：

$$\int_V f(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3', \alpha_1'', \alpha_2'', \alpha_3'')\frac{1}{\alpha_3'^2+\alpha_3''^2}d\alpha_1'd\alpha_2'd\alpha_3', d\alpha_1''d\alpha_2''d\alpha_3''。 \tag{283}$$

区域 V 是整个的六維空間。两种不变积分重合是联系于这样一个事实，即对于群

(281)，我們在[89]中所提到的由乘积 $G_\alpha G_\beta G_\alpha^{-1}G_\beta^{-1}$ 所生成的子群与这个群本身重合。事实上，不难証明，G' 既不是单个的恒等变换又不是由元素 E 和 $(-E)$ 所組成的正規子群。在不变积分 (283) 中实际計算函数 $u(G_\alpha)$ 可以簡单地利用下面这个引理，这个引理要用到多个复变数的解析函数的概念(参看本卷第二部第四章)。

引理　設 $w_s=u_s+iv_s(s=1, 2, \cdots, k)$ 是复变数 $z_s=x_s+iy_s(s=1, 2, \cdots, k)$ 的解析函数。那么函数 $(u_1, v_1, \cdots, u_k, v_k)$ 对于变数 $(x_1, y_1, \cdots, x_k, y_k)$ 的函数行列式等于函数 $(w_1,\cdots, w_k)$ 对于变数 $(z_1, \cdots, z_k)$ 的函数行列式模的平方。

我們有(参看本卷第二部第一和第四章)

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k}=\frac{\partial v_i}{\partial y_k}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_k}=-\frac{\partial u_i}{\partial y_k},$$

并且可以写成：

$$\frac{D(u_1, v_1, \cdots, u_k, v_k)}{D(x_1, y_1, \cdots, x_k, y_k)}=\begin{vmatrix} a_{11}, & b_{11}, & a_{12}, & b_{12}, & \cdots, & a_{1k}, & b_{1k} \\ -b_{11}, & a_{11}, & -b_{12}, & a_{12}, & \cdots, & -b_{1k}, & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1}, & b_{k1}, & a_{k2}, & b_{k2}, & \cdots, & a_{kk}, & b_{kk} \\ -b_{k1}, & a_{k1}, & -b_{k2}, & a_{k2}, & \cdots, & -b_{kk}, & a_{kk} \end{vmatrix}。$$

其中

$$a_{ik}=\frac{\partial u_i}{\partial x_k}; \quad b_{ik}=\frac{\partial v_i}{\partial x_k}。$$

把偶数的列乘上 i 加到奇数列去，我們就得到行列式：

$$\begin{vmatrix} c_{11}, & b_{11}, & c_{12}, & b_{12}, & \cdots, & c_{1k}, & b_{1k} \\ ic_{11}, & a_{11}, & ic_{12}, & a_{12}, & \cdots, & ic_{1k}, & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{k1}, & b_{k1}, & c_{k2}, & b_{k2}, & \cdots, & c_{kk}, & b_{kk} \\ ic_{k1}, & a_{k1}, & ic_{k2}, & b_{k2}, & \cdots, & ic_{kk}, & a_{kk} \end{vmatrix} (c_{ik}=a_{ik}+ib_{ik})$$

进一步，从偶数的行减去奇数的行的 i 倍，即得：

$$\begin{vmatrix} c_{11}, & b_{11}, & c_{12}, & b_{12}, & \cdots, & c_{1k}, & b_{1k} \\ 0, & \bar{c}_{11}, & 0, & \bar{c}_{12}, & \cdots, & 0, & \bar{c}_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{k1}, & b_{k1}, & c_{k2}, & b_{k2}, & \cdots, & c_{kk}, & b_{kk} \\ 0, & \bar{c}_{k1}, & 0, & \bar{c}_{k2}, & \cdots, & 0, & \bar{c}_{kk} \end{vmatrix}。$$

把全部奇数的列移到左边，把全部奇数的行移到上边，即得：

$$\begin{vmatrix} c_{11}, & c_{12}, & \cdots, & c_{1k}, & b_{11}, & b_{12}, & \cdots, & b_{1k} \\ c_{21}, & c_{22}, & \cdots, & c_{2k}, & b_{21}, & b_{22}, & \cdots, & b_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{k1}, & c_{k2}, & \cdots, & c_{kk}, & b_{k1}, & b_{k2}, & \cdots, & b_{kk} \\ 0, & 0, & \cdots, & 0, & \bar{c}_{11}, & \bar{c}_{12}, & \cdots, & c_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & \cdots, & 0, & \bar{c}_{k1}, & \bar{c}_{k2}, & \cdots, & \bar{c}_{kk} \end{vmatrix},$$

从而推出：

$$\frac{D(u_1, v_1, \cdots, u_k, v_k)}{D(x_1, y_1, \cdots, x_k, y_k)}=\begin{vmatrix} c_{11}, \cdots, c_{1k} \\ \cdots\cdots\cdots \\ c_{k1}, \cdots, c_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \bar{c}_{11}, \cdots, \bar{c}_{1k} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \bar{c}_{k1}, \cdots, \bar{c}_{kk} \end{vmatrix}=$$

$$=\left|\frac{D(w_1, \cdots, w_k)}{D(z_1, \cdots, z_k)}\right|^2。$$

我們回过来計算不变积分中的函数 $u(G_\alpha)$。为了这个目的。根据引理，只需要計算下面的函数行列式：

$$\frac{D(c_1, c_2, c_3)}{D(b_1, b_2, b_3)} \text{ 当 } b_0=b_3=1;\ b_1=b_2=0 \tag{284}$$

或者

$$\frac{D(c_1, c_2, c_3)}{D(a_1, a_2, b_3)} \text{ 当 } a_0=a_3=1;\ a_1=a_2=0。 \tag{285}$$

由关系式 $a_0a_3-a_1a_2=0$ 得：

$$-a_2+a_3\frac{\partial a_0}{\partial a_1}=0;\ -a_1+a_3\frac{\partial a_0}{\partial a_2}=0;\ a_0+a_3\frac{\partial a_0}{\partial a_3}=0。$$

再有：

$$\frac{\partial c_1}{\partial a_1}=b_0; \qquad \frac{\partial c_1}{\partial a_2}=0; \qquad \frac{\partial c_1}{\partial a_3}=b_1;$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial a_1}=b_2\frac{\partial a_0}{\partial a_1}; \qquad \frac{\partial c_2}{\partial a_2}=b_2\frac{\partial a_0}{\partial a_2}+b_3; \qquad \frac{\partial c_2}{\partial a_3}=b_2\frac{\partial a_0}{\partial a_3};$$

$$\frac{\partial c_3}{\partial a_1}=b_2; \qquad \frac{\partial c_3}{\partial a_2}=0; \qquad \frac{\partial c_3}{\partial a_3}=b_3,$$

由此得(283)。根据公式(284)我們会得到同样的結果。

索 引

А

абсолютно сходящийся, 絕对收斂

Б

беспорядок, 逆序

В

вектор, 矢量
　нулевий—零矢量
　ковариантный афинный—共变的仿射矢量
　контравариантный афинный—逆变的仿射矢量

Г

гиперкомплексное число, 超复数
главный определитель система, 方程組的主行列式
гомоморфизм, 准同构
градиент, 梯度
группа, 群
　абелевая—阿倍尔群
　абстрактная—抽象群
　～вращения—轉动群
　～линейний преобразований, 綫性变換群
　～матрица, 矩陣群
　циклическая—巡回群
　～правильний многогранник, 正多面体群
　～диэдра, 两面体群
　знакопеременная—交替群
　симметрическая—对称群
　фактор—商群
　простая—单純群
　общая линейная——般綫性群
　непрерывная—連續群

Д

А. Даниловский, 丹尼列夫斯基
дополнительное ортогональное подпространство, 互余正交子空間

Е

единичный элемент, 单位元素

И

изоморфизм, 同构
инвариантный интеграл, 不变积分

К

квадратичная форма, 二次型
　определенно положительная—正定二次型
　определенно отрицательная—負定二次型
　знакопостоянная—半定二次型
　знакопеременная—不定二次型
　закон инерций—二次型的慣性綫
　дискриминант—二次型的判別式
компактный, 紧致的

А. Н. Крылов, 克雷罗夫

Л

линейно-независимый, 綫性无关
линейно-зависимый, 綫性相关
линейная обнородная функция, 綫性齐次函数
линейное представление, 綫性表示
~группы, 群的綫性表示
объект—綫性表示的对象
линейное преобразование, 綫性变换
линейная форма, 綫性型

М

матрица, 矩陣
единичная—单位矩陣
диагональная—对角矩陣
транспонированная—轉置矩陣
подобная—相似矩陣
сопряженная—共軛矩陣
квазидиагональная—准对角矩陣
эрмитовская—厄密特矩陣
~проектирования—投影矩陣
минор, 子式
главаный—主子式

Н

неравенство, 不等式
~Адамара, 阿达馬不等式
~Бесселя, 貝塞尔不等式
норма (длина) вектора, 矢量的模(长)
нормальный делитель, 正規子群

О

однородная система, 齐次方程組
определитель, 行列式
~Грама, 格拉姆行列式
функциональный—函数行列式
оператор, 运算子
функциональный—函数运算子
линейный функциональный—綫性函数运算子
унитарный—运算子
эрмитовский—厄密特运算子
ортогональный, 正交的

П

параметр Кейла-Клейна, 凱萊-克兰参数
перестановка, 排列
основная—基本排列
подгруппа, 子群
порядка, 阶
правило Сорруса, 沙督斯法則
представление, 表示
эквивалентное—等价表示
приведенное—已約表示
приводимое—可約表示
неприводимое—不可約表示
преобразование, 变换
тождественное—恒同变换
собственное—正規变换
контраградиентное—逆步变换
подобное—相似变换
унитарное—U-变换
ортогональное—正交变换
ограниченное—有界变换
эрмитовское (самосопряженное),—厄密特(自共軛)变换
~Лоренца—劳倫次变换
проекции, 投影
пространство, 空間
векторное—矢量空間
~с бесчисленным множеством измерений—无限維空間
~Гильберта—希勒伯特空間

функциональное—函数空間
прямое произведение, 直接乘积

Р

ранг матрица, 矩陣的秩

С

свойство ортогональности, 正交性质
скалярное произведение, 数量(純量)乘积
след матрица, 矩陣的迹
составляющий, 分量,支量
ковариантный—共变分量
контравариантный—逆变分量
стереографическая проекция, 测地投影
структурние постаянные, 結构常数

Т

тензор, 張量
ковариантный—共变張量
контравариантный—逆变張量
смешанный—混合張量
симметричный ков.—对称共变張量
симметричный контра—对称逆变張量
кососимметричный—反对称張量
~деформации, 变形張量
теорема, 定理
~Лапласа, 拉普拉斯定理
~Крамера, 克兰姆定理
~об обращение системы функций, 关于函数組反轉的定理
~Пифагора, 商高定理
транспозиция, 置換

У

угла Эйлера, 尤拉角
уравнение, 方程
~замкнутосты—封閉性方程
об общенное—замкнутосты—广义封閉性方程
~Лапласа—拉普拉斯方程

Ф

М. К. Фаг, 法格
форма, 型
~Эмита, 厄密特型
билинеиная—双綫性型
особая—单一型

Х

характеристический определитель, 特征行列式
~уравнение матриц—矩陣的特征方程
~числа (собственные значения)—特征数,特征值
характера, 品格

Э

элементарный делитель, 初等因子

Я

ядро гомоморфизма, 准同构的核

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝高等数学教程　第三卷　第一　分册
作者＝［苏］斯米尔诺夫（В．И．Смирнов）著
页数＝３３９
ＳＳ号＝１２０７５２２６
出版日期＝１９７９．８